Devoir n° 3

À rendre pour la semaine du 4 décembre.

Exercice 1. (3 pts) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 + x + 2$ si $x < 0$ et par $f(x) = mx + n$ si $x \geqslant 0$, m et n étant deux nombres réels.

a. Déterminer l'ensemble $C = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \colon f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\}$.

b. Déterminer l'ensemble $D = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \colon f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\}$.

c. Pour $(m, n) \in D$, calculer la fonction dérivée f' et étudier sa continuité.

Exercice 2. (6 pts) On considère la fonction numérique $f(x) = \cos(\operatorname{Arctan} x)$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Calculer $f(\sqrt{3})$.

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

e. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ possède une fonction réciproque, qui sera notée g dans la suite.

f. Calculer $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

g. Montrer que pour x dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs on a :

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. (2 pts) Etudier la fonction $f : \ x \mapsto \arctan(\tan x)$. Donner en particulier, pour tout n entier, une expression la plus simple possible de $f(x)$ sur $I_n =] -\frac{\pi}{2} + n\pi \ ; \ \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

Exercice 4. (5 pts) On note F la fonction définie sur $[\frac{\pi}{6}, \pi]$ par $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$. On pose $F(\frac{\pi}{6}) = I$ et $F(\pi) = J$. On ne cherchera pas à calculer I et J.

a. Etudier F : dérivabilité, calcul de $F'(x)$, sens de variation, tableau de variation.

b. Montrer que F admet une réciproque (notée G) dérivable sur $[I, J[$.

c. Calculer $G'(0)$.

Exercice 5. (4 pts)

a. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{2 + \sin^2 t}\, dt$.

b. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f \colon t \mapsto \sqrt{t^2 + t + 1}$.