Feuille n° 1 (Théorie des ensembles)

Exercice 1.

a. Soient $A = \{2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_{\mathbb{N}} A$, $\complement_{\mathbb{R}} A$, $\complement_{\mathbb{N}} B$, $\complement_{A\cup B} A$.

b. Soient les intervalles (de $\mathbb{R}$) $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Déterminer $I \cap J$, $I \cup J$, $\complement_{\mathbb{R}} I$, $\complement_{\mathbb{R}} J$, $\complement_{\mathbb{R}}(I \cup J)$.

Exercice 2.

a. Soit A une partie d'un ensemble E. Déterminer $\complement_E \left(\complement_E A\right)$ et $A \cup \complement_E A$.

b. Montrer que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on a

$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B.$$

c. Montrer que $A \subset B$ implique $\complement_E B \subset \complement_E A$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a. Expliciter $\mathcal{P}(E_n)$ pour $n = 1$, 2 et 3.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\#\mathcal{P}(E_n) = 2^n$.

★ **Exercice 4.** Soit $Y \subset X$ des ensembles et $i : Y \to X$ l'inclusion de Y dans X (donnée par $i(y) = y$).

a. Montrer que $i(Z) = Z$ pour tout $Z \subset Y$.

b. Montrer que $i^{-1}(Z) = Z \cap Y$ pour tout $Z \subset X$.

c. Calculer $i(i^{-1}(Z))$ pour $Z \subset X$ et $i^{-1}(i(Z))$ pour $Z \subset Y$.

Exercice 5. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi, et que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Exercice 6.

a. Donner un exemple d'application injective mais non surjective.

b. Donner un exemple d'application surjective mais non injective.

★ **Exercice 7.** Soit $f : X \to Y$ une application.

a. Montrer qu'en général, $f(f^{-1}(W)) \neq W$ pour $W \subset Y$. Trouver cependant une relation toujours valide entre $f(f^{-1}(W))$ et W. [*Regarder sur des exemples.*]

b. Même question pour $f^{-1}(f(Z))$ et Z lorsque $Z \subset X$.

Exercice 8. Pour l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(\pi x) \end{array}$$

calculer les images directes suivantes :

$$f(\{0,1\}), \quad f([0,1/2]), \quad f(\mathbb{Z}), \quad f(2\mathbb{Z}),$$

où $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 9. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

a. Calculer les images inverses suivantes :

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(]-\infty,0]), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(]-1,1]), \quad f^{-1}(]4,+\infty[).$$

L'application f est-elle injective ? Surjective ?

b. Calculer les images directes suivantes :

$$f(X_1) \text{ où } X_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x>0\},$$
$$f(C) \text{ où } C = [0,1]\times[-2,3],$$
$$f(\Gamma_{\cos}) \text{ où } \cos \text{ est défini sur } [0,\pi],$$

et $\Gamma_{\cos} = \{(x,\cos x) \mid x\in[0,\pi]\}$ est le graphe de l'application cos sur $[0,\pi]$. [*Utiliser une interprétation géométrique et des dessins.*]

c. Mêmes questions pour l'application

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & |x|+|y|. \end{array}$$

Exercice 10. Soit X, Y des ensembles non vides et $p : X\times Y \to X$ la projection, telle que $p(x,y) = x$.

a. Montrer que $p^{-1}(Z) = Z\times Y$ pour $Z\subset X$.

b. Si un sous-ensemble de $X\times Y$ est de la forme $Z = A\times B$ avec $A\subset X$, $B\subset Y$, montrer que $p(Z) = A$.

c. Calculer $p(p^{-1}(Z))$ pour $Z\subset X$ et $p^{-1}(p(A\times B))$ pour $A\subset X$, $B\subset Y$.

Exercice 11. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f_{a,b}$ l'application

$$\begin{array}{rccl} f_{a,b} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b. \end{array}$$

a. Déterminer pour quelles valeurs de (a,b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.

b. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors $a = c$ et $b = d$.

c. Interpréter la dernière condition en terme d'injectivité d'une certaine application.

Exercice 12. On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x). \end{array}$$

a. Calculer $f^{-1}(\{y\})$ pour tout réel y. Pourquoi la valeur $y = 1/4$ est-elle particulière ? Est-ce que f est injective ? Surjective ?

b. Trouver deux intervalles I et J, aussi grands que possibles, tels que l'application $I \to J$ donnée par "la même formule" que f soit une bijection.

Exercice 13. Soit f l'application définie sur $\mathbb{Z}$ et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ donnée par

$$f(n) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = nk \text{ pour un certain entier } k\}.$$

a. Écrire $f(n)$ sous la forme de l'image directe de $\mathbb{Z}$ par une certaine application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (dépendant de n). Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

b. Montrer que $f(-n) = f(n)$ et donc que f n'est pas injective.

c. Montrer que si n, $m \in \mathbb{N}$ et $f(n) = f(m)$, alors $n = m$.

d. Montrer que l'ensemble des entiers impairs n'est pas dans $f(\mathbb{Z})$.

e. Donner une caractérisation des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ qui sont dans l'image directe $f(\mathbb{Z})$.

★ **Exercice 14.** (Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^n$!)

a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$(n-1)^2 \leqslant n^2 - n \leqslant n^2 - 1.$$

b. En déduire que pour tout entier $m \geqslant 0$, il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que

$$(n-1)^2 \leqslant m \leqslant n^2 - n, \qquad \text{ou bien} \qquad n^2 - n < m \leqslant n^2 - 1.$$

c. Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie de la manière suivante : pour $m \in \mathbb{N}$, soit $n = n(m)$ l'entier défini par la question précédente, alors

$$f(m) = \begin{cases} (n-1, m-(n-1)^2) & \text{si } (n-1)^2 \leqslant m \leqslant n^2 - n, \\ (n^2 - 1 - m, n-1) & \text{si } n^2 - n < m \leqslant n^2 - 1. \end{cases}$$

Placer $f(0)$, $f(1), \ldots, f(10)$ sur un dessin.

d. Montrer que f est bijective. [*Montrer qu'elle est injective et surjective.*]

e. On note $f(n) = (g(n), h(n))$ les deux composantes de f. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^3 \\ m & \mapsto & (g(g(m)), h(g(m)), h(m)) \end{array}$$

est une bijection. [*Montrer que cette application est la composition de deux bijections.*]

f. Montrer plus généralement que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^n$.

★ **Exercice 15.** Soit X un ensemble et $f : X \to \mathcal{P}(X)$ une application à valeurs dans l'ensemble des parties de X. On pose $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.

a. Montrer que $Y \notin f(X)$. [*Supposer que $Y = f(x)$ et regarder si $x \in Y$ ou pas.*] En déduire qu'il n'existe pas d'application surjective de X dans $\mathcal{P}(X)$.

b. On prend $X = \mathbb{N}$ et $f(n) = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geqslant n\}$. Calculer Y dans ce cas.