Feuille n° 7

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+\operatorname{th}(x)}\,dx,$$

$$\int x^4(1+x^5)^5\,dx, \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,dx;\ x>0, \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx;\ x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Exercice 2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$.

a. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.

b. Calculer I_1, puis I_5.

Exercice 3.

a. Dériver $f(x)=x\ln x$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire les primitives de ln sur $]0,+\infty[$.

b. Calculer

$$\int x^n \ln x\,dx$$

sur $]0,+\infty[$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

c. Calculer

$$\int (2x^3+1)\ln(x^2+x+1)\,dx.$$

Exercice 4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et impaire, et soit $T>0$. Prouver que $\int_{-T}^{T} f(x)\,dx=0$.

Exercice 5. Calculer les intégrales

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx, \quad \int_{-2}^{2} \left|x^2-1\right|\,dx, \quad \int_0^{\pi}\cos^3(\theta)d\theta, \quad \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \sin^5(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta.$$

Exercice 6. Calculer, en intégrant par parties,

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(x)\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx, \qquad \int_0^x e^t\cos t\,dt.$$

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$I_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$$

a. Calculer I_1 [*faire une intégration par parties*].

b. Montrer que pour tout $n>0$, on a

$$I_{n+1}=\frac{e^3}{3}-\frac{n+1}{3}I_n.$$

Exercice 8. Soit la fonction définie pour $x \neq 1$, $x \neq 2$, par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Trouver des réels a et b tels que pour tout réel x différent de 1 et 2 on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

En déduire une primitive de f.

Exercice 9. En posant un changement de variable approprié, calculer

$$a) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad b) \int_0^{\mathrm{sh}(1)} \sqrt{1+x^2}\,dx,$$

$$c) \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\,dx, \quad \text{poser } u = \sqrt{e^x-1}.$$

$$d) \int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx, \quad \text{poser } t = x^4.$$