ANNÉE 2006-2007	SESSION DE JANVIER 2007
GU : MISMI	**UE** : MIS101
Date : 5/01/2007	Durée : 3h00
Documents non autorisés	

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

(on convient, pour toute partie C de E, de noter $E \setminus C$ le complémentaire de C dans E).

Série de questions II

On considère dans cette série de questions l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\,x_2$ pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$.

II.a. Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit surjective de E dans F ? Montrer que l'application f donnée ici est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout nombre réel y, on a l'inégalité $y + |y| \geq 0$; montrer enfin que l'application $g\ : y \in \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{y + |y|}, |y|/2)$ est telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

II.b. Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit injective de E dans F ? L'application f donnée ici est-elle injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

Série de questions III

III.a. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ ainsi que les symboles mathématiques $\leq, >, \in$, exprimer les deux assertions :
– « a est un majorant de A »
– « a n'est pas un majorant de A ».

III.b. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a un majorant de A ; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ et les symboles $\leq, <, >, \in$, exprimer les deux assertions :
– « a est la borne supérieure de A »
– « a n'est pas la borne supérieure de A ».

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

Soient a et n des éléments de $\mathbb{N}$. On suppose $a \geq 2$ et $n \geq 1$.

1.a. Montrer que les nombres entiers a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.

1.b. Montrer l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$; en déduire que $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ et a^n sont des nombres entiers premiers entre eux.

1.c. On considère l'équation

$$6x + 215y = 1 \; ; \qquad (E)$$

- Après avoir vérifié que $215 = 6^3 - 1$, justifier (sans calcul) pourquoi il existe au moins un couple d'entiers relatifs (x, y) satisfaisant (E) ;
- déterminer tous les couples d'entiers relatifs qui satisfont (E).

Exercice 2.

2.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2 - iZ + 2 = 0$.

2.b. Déduire de **2.a** les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (on donnera ces solutions sous forme polaire $z = re^{i\theta}$ en précisant les valeurs de r et θ).

2.c. Placer sur un dessin propre tous les points (a, b) du plan tels que $a + ib$ soit une solution de $z^6 - iz^3 + 2 = 0$.

Exercice 3.

3.a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 34 et 21.

3.b. On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \, , \; \forall n \in \mathbb{N} \, .$$

- Rappeler le principe du raisonnement par récurrence et montrer, en appliquant ce principe, que $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout n.
- Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, d est un diviseur commun de F_n et F_{n+1} si et seulement si d est un diviseur commun de F_{n+1} et F_{n+2} ; en déduire que $\mathrm{PGCD}\,(F_{n+2}, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}\,(F_{n+1}, F_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

– Déduire de ce qui précède que deux termes consécutifs de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ sont toujours premiers entre eux.

Exercice 4.

On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. Soit la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+2) & -2 < x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \end{cases}$$

– Etudier ses limites en -2 et $+\infty$;
– Montrer que f est continue sur I ;
– Montrer que f est dérivable sur I ;
– Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 5.

5.a. On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t + 1}$, transformer l'intégrale

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\, dt$$

en l'intégrale sur un intervalle que l'on précisera d'une certaine fraction rationnelle.

5.b. Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b uniques (que l'on calculera) telles que

$$\forall u > 1\,,\ \frac{1}{u^2 - 1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}\,;$$

déduire de ce résultat (combiné avec celui de **5.a**) la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\, dt\,.$$

5.c. Exprimer à l'aide des fonctions classiques (logarithme, radicaux, exponentielle) la primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{e^t + 1}$$

qui vérifie $F(0) = 0$.

5.d. Calculer les limites lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big)$$

et en déduire les limites de la fonction F lorsque x tend vers $-\infty$ et x tend vers $+\infty$; justifier pourquoi F réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.e. Justifier pourquoi l'application réciproque F^{-1} est dérivable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et montrer que la fonction $y = F^{-1}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{y(x)}+1}}\,,\ x \in \mathbb{R}\,; \tag{$*$}$$

cette équation différentielle $(*)$ est-elle une équation linéaire du premier ordre ?

5.f. Trouver l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{y(x)}{4}\Big)\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \tag{$**$}$$

qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 0$ [1].

<u>Exercice 6.</u>

6.a. Soient A et B deux paramètres réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle homogène du second ordre :

$$A\,y''(t) + B\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{$\dagger$}$$

Quelle inégalité doivent vérifier les paramètres réels strictement positifs A et B pour que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\dagger)$ soient toutes de la forme $t \longmapsto e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))$, où λ et ω sont des constantes strictement positives, C_1, C_2 des constantes réelles ; donner dans ce cas en fonction de A et B les valeurs des constantes λ et ω. Que se passe-t-il lorsque l'inégalité en question n'est plus satisfaite ?

---

1. Cette dernière question peut être traitée tout-à-fait indépendamment des précédentes ; pour information, l'équation différentielle $(**)$ réalise une version « approchée »de l'équation différentielle $(*)$.

6.b. On fixe maintenant $A = 10$ et $B = 2$. Déterminer toutes les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du second ordre

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

6.c. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = \cos(2t)\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,,$$

qui vérifie de plus les deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.