FEUILLE D'EXERCICES n° 6

Exercice 1 – [*Inégalité de Kolmogorov*] Soient a et M des réels strictement positifs, et X une variable aléatoire réelle telle que $|X| \leqslant M$.

1) Montrer que $X^2 \leqslant \mathbf{1}_{\{|X|\leqslant a\}} a^2 + \mathbf{1}_{\{|X|>a\}} M^2$.

2) En déduire que $P(|X| > a) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(X^2) - a^2}{M^2}$.

Exercice 2 – [*Fonction caractéristique*] La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X est la fonction $\Phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par $t \mapsto \mathbb{E}(\exp(itX))$. On admettra qu'elle est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire caractérise sa loi.

1) On suppose que X suit une loi uniforme $U([a,b])$. Exprimer Φ_X.

2) On suppose que X suit une loi de Poisson $P(\lambda)$. Montrer que $\Phi_X(t) = \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)$.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Exprimer la fonction caractéristique de $X + Y$ en fonction de celles de X et de Y. Si X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, exprimer la fonction caractéristique de $X + Y$. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 3 – On définit sur le même espace probabilisé (Ω, T, P) la variable aléatoire X et la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\Omega \to \mathbb{R}$, de la manière suivante : (A, B, C) étant une partition de Ω en trois événements de probabilités respectives 1/4, 1/4 et 1/2, on pose

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \cup B, \\ 2 & \text{si } \omega \in C. \end{cases} \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{si } \omega \in A, \\ 1 + \exp(-n) & \text{si } \omega \in B, \\ \frac{2n}{n+1} & \text{si } \omega \in C. \end{cases}$$

1) Montrer que X_n converge vers X presque sûrement et en moyenne L^1.

2) Justifier de deux manières différentes le fait que X_n converge vers X en probabilité.

3) X_n converge-t-elle en loi vers X ?

Exercice 4 – Pour tout entier $n > 0$, on considère la variable aléatoire X_n qui suit la loi uniforme discrète sur l'ensemble fini $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$, ce qui signifie qu'elle prend chacune de ces valeurs avec la même probabilité $1/(n+1)$. Montrer que X_n converge en loi vers une variable X qui suit une loi uniforme à densité $U([0,1])$.

Exercice 5 – Pour tout entier $n > 0$, on considère la variable aléatoire X_n qui suit la loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{0, 2^{-n}\}$. On définit ainsi une suite X_n de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On pose alors $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1) Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos(t/2^{k+1}) \exp(it/2^{k+1}) = \exp\left(i\frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) \frac{\sin(t/2)}{2^n \sin(t/2^{n+1})}$.

En déduire la limite de cette expression lorsque $n \to +\infty$.

2) Montrer que la suite Z_n converge en loi vers Z, qui suit une loi uniforme à densité $U([0,1])$.

Exercice 6 – La variable aléatoire X a pour densité $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, telle que

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1,0], \\ 1-t & \text{si } t \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n > 0$ entier, on note $Y_n = X^{1/(2n+1)}$ (définition étendue au cas $X < 0$ car $2n+1$ impair).

1) Déterminer une densité de Y_n.

2) Montrer que Y_n converge en loi vers une variable discrète Y qu'on déterminera.

3) Montrer que Y_n ne converge pas en probabilité vers Y.

Exercice 7 – X_n est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Chaque variable X_n suit une loi de Bernoulli $B(1, p_n)$ où $0 < p_n < 1$.

1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - p_k)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

2) Dans le cas particulier $p_n = 2^{-n}$, montrer que $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante.

Exercice 8 – On jette 3 fois de suite une pièce de monnaie non équilibrée pour laquelle $P(\texttt{Face}) = 1/4$. La variable aléatoire S_3 donne à la suite de ce triple jet de la pièce, le nombre de `Face` obtenus.

1) Donner la loi de probabilité de S_3, son espérance et sa variance.

2) On jette maintenant n fois cette pièce et on s'intéresse à la variable $F_n = S_n/n$ donnant la fréquence d'apparition de `Face` sur n jets.

a) Déterminer une valeur à donner à n pour que $P(20\% \leqslant F_n \leqslant 30\%) > 0,95$. [*Penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev*].

b) On suppose n grand, et on se permet d'approcher les probabilités en jeu grâce au théorème de la limite centrale. Répondre à la question précédente sous ce modèle.

Exercice 9 – Dans un commerce ouvert 49 semaines par an, la probabilité de rupture de stock en fin de semaine est constante, égale à $p = 0,05$. La variable F_n donne la fréquence de rupture de stock en fin de semaine sur n semaines analysées.

1) Calculer l'espérance et la variance de F_{49}.

2) Evaluer la probabilité de l'événement « $|F_{49} - \mathbb{E}(F_{49})| > 0,01$ ».

3) Sur quel nombre n de semaines suffit-il de faire porter l'analyse pour que

$$P(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| > 0,01) \leqslant 0,25?$$