Corrigé du devoir n° 3

Exercice 1.

1.
   - Fausse.
   - Négation : $\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x < 2$ et $x^2 \geq 4$.
   - Preuve de la négation : $x = -3$ convient.

2.
   - Fausse.
   - Négation : $\exists\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\, g$ croissantes$)$ et $(f \cdot g$ non croissante[1]$)$.
   - Preuve de la négation : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 2$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$ sont toutes deux croissantes. Mais $f \cdot g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$ n'est pas croissante.

3.
   - Fausse.
   - Négation : $\exists\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\, g$ croissantes et f positive $)$ et $(f \cdot g$ non croissante$)$.
   - Preuve de la négation : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 2$ est croissante, positive et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 10$ est croissante. Mais $f \cdot g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 8x - 20$ n'est pas croissante.

4.
   - Vraie.
   - Preuve : soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leq y$. Comme f, g sont croissantes et positives, on a les inégalités :

     $$(I_f) \quad 0 \leq f(x) \leq f(y) \qquad \text{et} \qquad (I_g) \quad 0 \leq g(x) \leq g(y).$$

     On multiplie (I_f) par $g(x)$ $(g(x) \geq 0)$ et (I_g) par $f(y)$ $(f(y) \geq 0)$ pour obtenir :

     $$f(x)g(x) \leq f(y)g(x) \qquad \text{et} \qquad f(y)g(x) \leq f(y)g(y).$$

     On a donc $f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$ (transitivité de $\leq$).

5.
   - Vraie.
   - Preuve : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$. Alors :

     $$|x - 1| < \alpha = \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{3|x-1|}_{=|3x-3|} < 3 \times \alpha = \varepsilon.$$

   - Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$.

     $$\begin{aligned} (5) \quad &\Leftrightarrow \quad f(1) = 3 \quad \text{et} \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |3x - 3| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad f(1) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 3. \end{aligned}$$

6.
   - Fausse.
   - Négation : $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| < \alpha \quad \text{et} \quad |2x - 1| \geq \varepsilon$.

[1] Une fonction non croissante n'est pas nécessairement décroissante. Par exemple la fonction : $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = (x-1)^2$ n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

- Preuve de la négation : On choisit $\varepsilon = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors :

$$\text{si on pose } x = 1, \quad 0 = |x-1| < \alpha \quad \text{et} \quad 1 = |2x-1| \geq \varepsilon = 1.$$

- Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$. Alors :

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 1} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(1) = 1.$$

Exercice 2. On raisonne par l'absurde. On suppose que l'on a rangé $nk+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, numérotés de 1 à n, et que tous les tiroirs contiennent au plus k paires de chaussettes. On note, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, N_i le nombre de paire(s) de chaussettes qui se trouve(nt) dans le tiroir numéro i. Alors on a :

$$\begin{cases} (1) & : \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\,, \quad N_i \leq k, \\ (2) & : \ N_1 + N_2 + \dots + N_n = nk+1. \end{cases}$$

En sommant les inégalités de (1), on obtient : $N_1 + N_2 + \dots + N_n \leq nk$. En utilisant (2), on trouve :

$$nk + 1 \leq nk \quad \text{(ce qui est faux)}\ .$$

On note (P) la proposition que l'on vient de démontrer.

Applications

1. On applique (P) avec $n = 5$ et $k = 2$.
2. On définit les $n+1$ sommes suivantes :

$$S_0 := 0,\ S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ \dots,\ S_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i,\ \dots,\ S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n\ .$$

   Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on note $r_i \in \{0, \dots, n-1\}$, le reste de la division euclidienne de S_i par n. On range alors les sommes S_i, $i \in \{0, \dots, n\}$, dans n tiroirs numérotés de 0 à $n-1$ en mettant la somme S_i dans le tiroir numéroté r_i. On applique (P) avec « $n = n$ » et $k = 1$. Un des tiroirs contient donc (au moins) $2 = k+1$ sommes S_i. Ainsi,

$$\exists\, p, q \in \{0, .., n\}\ ,\ p < q, \quad \text{tels que} \quad r_p = r_q.$$

   Donc n divise $S_q - S_p$. On explicite l'expression de $S_q - S_p$, pour obtenir :

$$n \quad \text{divise} \quad a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + \underbrace{a_{p+(q-p)}}_{a_q}.$$

Exercice 3. On procède par double inclusion.

- Montrons que $f(A) \subset B$.
  Soit $x \in A$. $f(x) = -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$. Comme $x \neq -2$, $-(x+2)^2 < 0$. Donc $f(x) < 4$, i.e. $f(x) \in B$.
- Montrons que $B \subset f(A)$.
  Soit $b \in B$. On cherche $x \in A$ tel que $f(x) = b$. Autrement dit, on souhaite trouver une solution de l'équation :

$$(E) \quad -x^2 - 4x - b = 0 \qquad \text{qui est } \textit{dans } A.$$

  Le discriminant vaut $16 - 4b > 0$ car $b < -4$ ($b \in B$). (E) a donc deux solutions *dans* $\mathbb{R}$:

$$x_- = \frac{-4 - \sqrt{16 - 4b}}{2} \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-4 + \sqrt{16-4b}}{2}.$$

  On remarque que $x_- \in A$.
  Conclusion : il existe $x \in A$ ($x = \frac{-4-\sqrt{16-4b}}{2}$) tel que $f(x) = b$.

Exercice 4.

1. On a une forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ ».

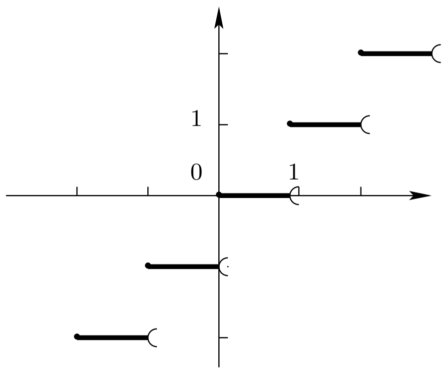
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} &= \left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}\right) \times \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} \\ &= \underbrace{\frac{(\sqrt{2x+1})^2-3^2}{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{2})^2}}_{=2} \times \underbrace{\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}}_{\underset{x\to 4}{\longrightarrow}\frac{\sqrt{2}}{3}} \quad \underset{x\to 4}{\longrightarrow} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

2. On a également une forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ ».

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(\frac{x}{2})} &= \sin(x) \times \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\sin^3(\frac{x}{2})} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}} \times \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{(\frac{x}{2})^3}{\sin^3(\frac{x}{2})}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \times 2^3 \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 4.\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. Représentation graphique de la fonction partie entière :



2. On note $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec

$$N(x) := x^4E(x) + 2x^3 + (21E(x^2)+1)x \quad \text{et} \quad D(x) := x^3E(x) + 3x^2 + 21E(x^2).$$

- Si $x < 0$, alors $E(x) \leq -1$. On a $xE(x) \geq -x > 0$, $3x^2 > 0$, $21E(x^2) \geq 0$.
  $D(x) > 0$, donc $f(x)$ est bien défini.
- Si $x > 0$, alors $E(x) \geq 0$. On a $xE(x) \geq 0$, $3x^2 > 0$, $21E(x^2) \geq 0$.
  $D(x) > 0$, donc $f(x)$ est bien défini.
- Si $x = 0$, alors $D(x) = 0$ donc $f(x)$ n'est pas défini.

Conclusion : le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

3. La présence de la fonction partie entière dans l'expression de f nous contraint à scinder l'étude en deux parties.

- On sait que $\lim_{x\to 1^+} E(x) = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} E(x^2) = 1$. Donc :

$$\lim_{x\to 1^+} N(x) = 25 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} D(x) = 25.$$

Le théorème sur « les quotients de limites » s'applique. On obtient : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

- On a $\lim_{x\to 1^-} E(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^-} E(x^2) = 0$. Donc
$$\lim_{x\to 1^-} N(x) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} D(x) = 3.$$
On conclut comme ci-dessus : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

Conclusion : $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

4. (a)
$$X^4 + X^3 - 3X^2 + 22X - 21 = (X-1)(X^3 + 2X^2 - X + 21)$$
$$\text{et} \quad 2X^2 - 3X + 1 = (X-1)(2X-1).$$

(b) Si $x \in]1, \frac{4}{3}[$, alors $E(x) = 1$ et $E(x^2) = 1$ $(1 < x^2 < \frac{16}{9} < 2)$. $f(x) - 1$ s'écrit :
$$\frac{x^4 + 2x^3 + 22x}{x^3 + 3x^2 + 21} - 1 = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 + 22x - 21}{x^3 + 3x^2 + 21} = (x-1) \times \frac{x^3 + 2x^2 - x + 21}{x^3 + 3x^2 + 21},$$
d'après 4(a). On pose $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 21$ et $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 21$. Sur $]1, \frac{4}{3}[$, on a donc :
$$|f(x) - 1| = |x-1| \frac{|P(x)|}{|Q(x)|}. \qquad (\star)$$

- Si $x \in]1, \frac{4}{3}[$, on a $Q(x) > 1^3 + 3 \times 1^2 + 21 = 25$, donc
$$|Q(x)| > 25. \qquad (\star\star)$$
- Si $x \in]1, \frac{4}{3}[$, d'après l'inégalité triangulaire, on a
$$|P(x)| \leq |x^3| + 2|x^2| + |x| + 21 < \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 21 = \frac{763}{27} \qquad (\star\star\star)$$

De $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$, on déduit que sur $]1, \frac{4}{3}[$, on a
$$|f(x) - 1| < A|x-1| \quad \text{avec} \quad A = \frac{763}{675}.$$
Montrons maintenant que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ en revenant à la définition, i.e. prouvons :
$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 1 < x < 1 + \alpha \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit α comme étant le plus petit des deux nombres $\frac{\varepsilon}{A}$ et $\frac{1}{3}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 < x < 1 + \alpha$. D'après le choix de α, on a $1 < x < \frac{4}{3}$ et $|x-1| < \frac{\varepsilon}{A}$ et donc :
$$|f(x) - 1| < A|x-1| < A \times \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

(c) Si $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors $E(x) = 0$ et $E(x^2) = 0$ $(0 \leq \frac{1}{4} < x^2 < 1)$. $f(x) - 1$ s'écrit :
$$\frac{2x^3 + x}{3x^2} - 1 = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x} = (x-1) \times \frac{2x-1}{3x} \qquad \text{(d'après 4(a))}.$$
Sur $]\frac{1}{2}, 1[$, on a donc :
$$|f(x) - 1| = |x-1| \frac{|2x-1|}{|3x|}.$$
Si $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors :
$$|2x-1| \leq 2|x| + 1 < 3 \quad \text{et} \quad |3x| > \frac{3}{2}.$$
Finalement
$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow |f(x) - 1| < 2|x-1|.$$
La preuve de $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ est analogue à celle faite pour $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

(d) Des résultats (4b) et (4c), on déduit : $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.