
Devoir n° 5

À rendre pour le premier TD de la semaine du 15/12.

Notez lisiblement la lettre de votre section suivie de votre numéro de groupe dans le coin supérieur droit de votre copie.

Exercice 1. Soit a, b, c trois nombres réels. On définit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = ax^2 + bx + c$ si $x \geq 0$. À quelle condition sur a, b, c la fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^2 ? f peut-elle être de classe \mathcal{C}^3 ?

Exercice 2. On définit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Étudier la dérivabilité de f en tout point de \mathbb{R} .

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

- a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.
c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1 + 2x} \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.$$

Exercice 5. On considère les fonctions $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

- a) Donner les domaines de définition et de dérivabilité de f et g . Calculer f' et g' . Déterminer les extrema locaux de f et g . Existe-t-il des extrema globaux?
b) Déterminer les asymptotes aux graphes de f et g .
c) Déterminer les intervalles sur lesquels f et g sont convexes, concaves, trouver les points d'inflexion.
d) Tracer les graphes de f et g .