Partiel de Mathématiques n° 1

Durée 1h30. Documents et calculatrices interdits

Le 31 octobre 2003

Barême indicatif : 4, 4, 4, 3, 3, 2.

Question de cours.

1. Donner à l'aide de quantificateurs la définition de la propriété suivante :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

où $x_0, l \in \mathbb{R}$ et f est une fonction réelle de variable réelle définie au voisinage de x_0.

2. Donner la définition de la contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$. Démontrer par contraposée l'assertion suivante :
« pour tout $p \in \mathbb{N}$, p^2 pair $\Rightarrow$ p pair ».

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + (1 + \mathrm{i}) = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - z^3 + (1 + \mathrm{i}) = 0$.

Exercice 2. Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3x - 4}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Résoudre sur D_f l'inéquation $f(x) \geq 1$.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a > b$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a^n - b^n)a + b^n(a - b).$$

2. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$ $a - b$ divise $a^n - b^n$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x^2 + 2x - 3| \leq 2x + 1.$$

Exercice 5. Déterminer explicitement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

1. $A = \left\{x \in [0, 1] \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1\right\}$
2. $B = \left\{x \in [0, 1] \mid \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1\right\}$.