Feuille n^{o} 5

Dérivabilité

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :

$$f(x) = \sqrt{1 + (x \cos x)^2}, \qquad g(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \qquad k(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}.$$

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
b) On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

Exercice 3. En utilisant la définition, calculer la dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2$.

Exercice 4. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 5. La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 6. Soit a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = a(x^2-1) + b \text{ si } x > 1.$$

Déterminer a et b de manière à ce que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction dérivée d'ordre n de $f(x) = \sin x$.

Exercice 8. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 9.
a) Montrer que l'on a $x \cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
b) Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
c) Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 10.
a) Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2+1)\sin x$.
b) Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x \sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 11.
a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ s'annulant en 3 points de $]0,1[$. Montrer qu'il existe un point x_0 de $]0,1[$ tel que $f''(x_0) = 0$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,1[$ s'annulant en $n+1$ points de $]0,1[$. Montrer qu'il existe un point x_0 de $]0,1[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 12. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ et $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

Exercice 13. En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x > 0$ et $x < 0$ démontrer que
a) pour tout réel x on a $e^x \geq 1 + x$;
b) pour tout $x > -1$ on a $\ln(1 + x) \leq x$.

Exercice 14.
a) A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.
c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 15. A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

★ **Exercice 16.** Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Formule de Taylor

Exercice 17.
a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 0 pour la fonction sinus.
b) Montrer que l'on a $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ pour tout réel x.

Exercice 18.
a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 7 et au point 0 pour la fonction cosinus.
b) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 1 pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 19. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 1, 2 et 3 pour le polynôme $2 + 3x - 4x^2 + 2x^3$ au point $x = 1$.

Exercice 20. Montrer les encadrements suivants :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.
b) $\forall x > 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 21. En écrivant la formule de Taylor à l'ordre n au point 0 pour la fonction $x \mapsto e^x$ montrer que l'on a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n \qquad \text{où } |r_n| < \frac{e}{(n+1)!}.$$

★ **Exercice 22.** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$, $\delta > 0$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$