Populációdinamikai modellek

Populációdinamika és a modellezés

Populáció és modellezése

A populációdinamika a különféle élőlények egyedszámának, illetőleg népességviszonyainak térbeni és időbeli változásával foglalkozik. Mivel e tényezők hatással vannak az ember életkörülményeire, ezért fontos, hogy megfelelő képet kapjunk ezekről a változásokról, s esetlegesen előrejelzéseket is tudjunk tenni velük kapcsolatban.

Ahhoz, hogy megfelelő rálátásunk legyen a folyamatokra, szükséges, hogy a saját ismereteink alapján, a rendelkezésünkre álló eszközökkel befogadjuk, feldolgozzuk a környezetből érkező adatokat, és értelmezzük is őket. Ebben segít a modellezés. Egy modell felállításakor voltaképpen a környezetet „egyszerűsítjük le", s a valós adatok alapján a modellünkkel igyekszünk minél inkább a környezetben tapasztaltakhoz hű eredményekre jutni.

A matematikai modellezés

A mi esetünkben egy, vagy többszereplős, sok változóval és állandókkal, alapvetően biológiai tárgyú folyamatokat kívánunk modellezni. Tekintve, hogy a hangsúly a változásokon van, a matematikában fellelhető differenciálegyenlet-rendszerek egy jó kiindulási pontnak tűnnek. Alapvető biológiai ismeretek mellett, elég nagyszámú rendelkezésre álló adat alapján felállíthatóak különféle differenciálegyenletek a populáció egyes tagjai létszámának változására, melyeket megfelelő matematikai (függvénytani, differenciálszámítási…) ismeretek segítségével meg lehet oldani. Egyedszámokkal, és populációs állandókkal dolgozik ez a fajta modell, minden egyes differenciálegyenletben helyet kapnak a populáció egyes tagjainak egymáshoz való viszonyai (szimbiózis, antibiózis, élősködés…).

Egy „leegyszerűsített populáció" (vagyis lényegében a modelljeink) alapvetően három féleképpen viselkedhet:

1. **Aszimptotikusan stabil viselkedés**ről beszélünk, hogyha tetszőleges kezdőállapotról a folyamat egy meghatározott állapothoz tart (de azt sohasem éri el: például a korlátos növekedés modellje).
2. **Periodikus viselkedés**ről beszélünk, hogyha bizonyos T időközönként a folyamat ismétli önmagát (például a Lotka-Volterra modell).
3. **Kaotikus viselkedés**ről beszélünk, hogyha a folyamat nagymértékben függ a kezdőállapottól. Ilyenkor nem lehetséges megfelelő előrejelzéseket tenni a jövőre nézve (általában három változó esetén)

A matematikai modellezés kisegítése

A modellekre általánosan is jellemző, hogy minél inkább hű a valósághoz, annál pontosabbak, annál megbízhatóbbak, de ugyanakkor annál bonyolultabbak is. Ez különösképpen igaz egy differenciálegyenlet-rendszerekre épülő modell esetében.

Éppen emiatt van szükség az informatika vívmányaira. Ugyanis az ilyen modelleknél igaz, hogy jó dolog, ha van egy kézzelfogható megoldásunk (például egy konkrét függvény), de nem feltétlenül szükséges. A változásokról, a populáció tagjai közötti kapcsolatokról, és ezek jövőbeni alakulásáról egy grafikon sokkalta többet is tud mondani, mint mondjuk egy másfél oldalas kifejezés. Nemcsak, hogy szemléletesebb, de könnyebben is kezelhető, hiszen alapvető, de lényeges tulajdonságok olvashatóak le róla; mint például:

1. a folyamat alaptípusa (aszimptotikusan stabil, periodikus, kaotikus)
2. egyensúlyi pontok megléte és fajtája (stabil, instabil)
3. görbék menete, típusa (esetleges kapcsolatok más görbékkel)
4. a folyamat „érzékenységének” mértéke

A számítógépen többféle programmal is szemléltethetjük egy-egy differenciálegyenlet-rendszer „megoldásait”. Professzionális segítséget nyújt az általunk is használt Matlab nevezetű program. Némi programozói alapismeret segítségével könnyen kezelhető, és igen sok lehetőséget nyújtó programról van szó. Rendelkezik beépített ODE megoldó-algoritmusokkal, amik nagyban megkönnyítik a munkánkat a differenciálegyenlet-rendszerek kezelése terén. Emellett számos egyéb funkciójának köszönhetően lehetővé teszi a megfelelő típusú szemléltetést, továbbá a paraméterek gyors módosítását is, ami pedig egy alaposabb, és hatalmas adatmennyiséggel dolgozó kutatás kivitelezését teszi lehetővé.

Populációdinamikai modellek és számítógépes vizsgálatuk

A különféle modellekről

Egy differenciálegyenleteken alapuló populációdinamikai modell esetében a legmeghatározóbb tényező a változók (tehát a résztvevők, a jelenlévő fajok) száma. Már itt az elején megjegyeznénk, hogy a különféle paraméterek, mint halálozási arány, táplálkozásnál használatos arányokat (amik önmagukban is függnek a környezet egyéb tényezőitől [éghajlat, terület…], s emiatt változhatnak) itt nem tekintjük változóknak.

Dolgozatunk során alapvetően az egyváltozós, és a kétváltozós modelleket mutatjuk be, de szó lesz a háromváltozós modellekről is. Eme modellek részek kezelhetőségük, bonyolultságuk, viselkedésük szempontjából is nagymértékben eltérnek egymástól, ezért is szükséges a szétválasztásuk.

Egyszereplős modellek

Ezek a legegyszerűbb modellek, numerikusan (többé-kevésbé egyszerűen) megoldhatóak. Igen ismertek, és általában a populációdinamika bevezetésénél kerülnek elő. Ezeknél a számítógépnek alapvetően csak szemléltető szerepe van. Két típusát különböztethetjük meg:

I. *Korlátlan növekedés modellje:*
Lényege, hogy az adott faj szaporodását, fejlődését semmilyen tényező nem gátolja meg, így a faj egyedszáma minden határon túlnőne. Ez persze csak egy idealizált modell, a valóságban nem fordulhat elő.
Jelen esetben a

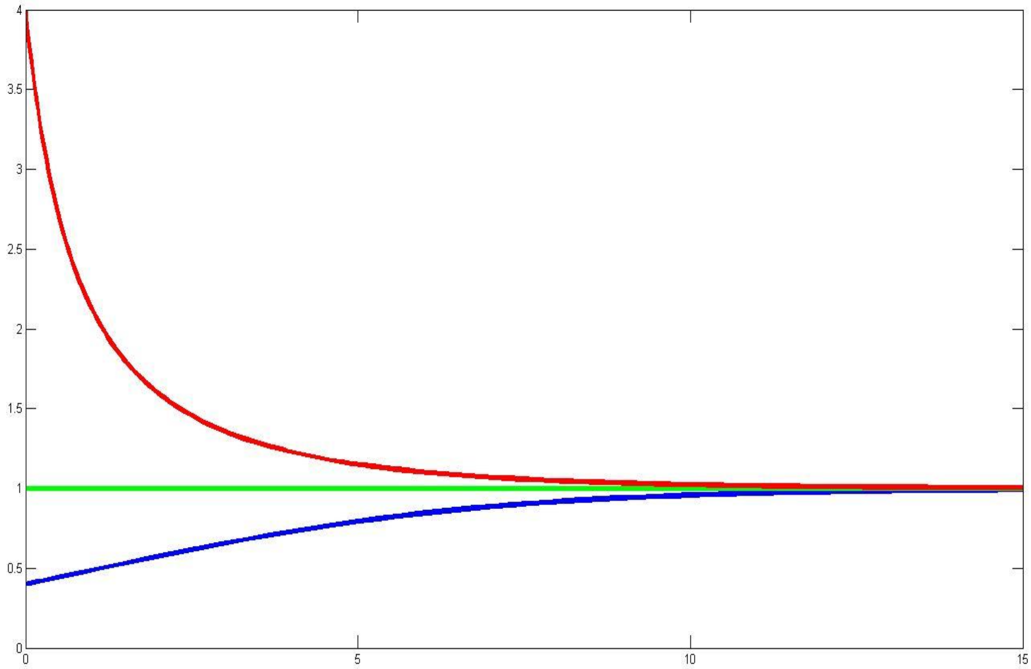
$$\frac{dx}{dt} = \beta \cdot x$$

egyenlet megoldása szükséges, ahol β egy paraméter.

II. *Korlátos növekedés modellje:*
A korlátlan növekedés modelljénél valószínűbb modellt jelent a korlátos növekedés modellje, amely a fajra nézve egy környezeti tényezők által meghatározott eltartó-képességet feltételez, amely által meghatározott egyedszámot a populáció egyre inkább megközelít, mint ideális értéket.
Lényegében a

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x \cdot (K - x)$$

differenciálegyenletet kell megoldani, ahol α paraméter, K pedig az eltartó-képesség.



1. ábra: Korlátos növekedés modelljének lehetséges kimenetelei

Kétszereplős modellek

Ezen modellekben két faj él egy populációban, s eme két faj között felléphet versengés, együttélés, vagy pedig antibiózis (ragadozó-zsákmány modell). Ezek már olyan esetek, amikre már nincsen megfelelően alkalmazható megoldó-formula. Itt már nagy szerepet kap a Matlab programunk, mind a megoldásban, mind a szemléltetésben. Ezek már összetettebb modellek, többféle is ismeretes, mi a legismertebbel, az un. *Lotka-Volterra modell*el, és változataival foglalkoztunk.

A Lotka-Volterra modell legegyszerűbb változata az alábbi differenciálegyenlet-rendszert tételezi fel:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y$$

Itt az x változó a zsákmány létszámáról tájékoztat, az y változó pedig a ragadozóéról. (Az a, b, c, d pedig paraméterek.) Alapvetően ennek a megoldása periodikus folyamat lesz, kivétel, hogyha a kiindulási értékünk a fixpont. Könnyen belátható, hogy fixpontként a $(0,0)$ és az $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ pontok szolgálnak.

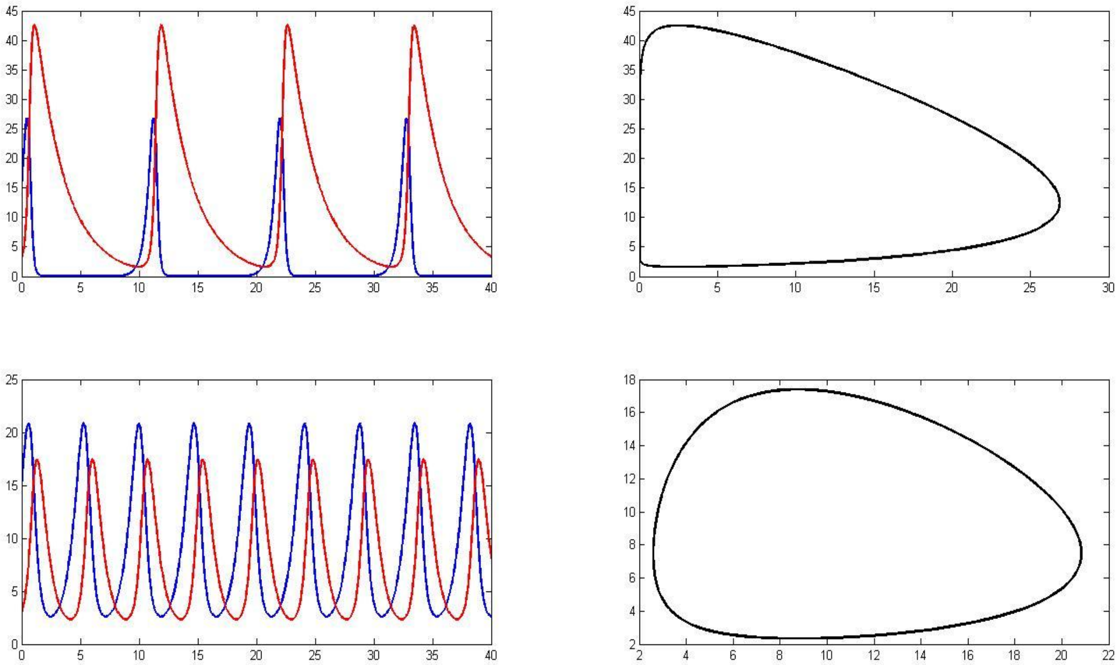
Egy érdekesebb változata ennek a modellnek az, amikor egy vadász is beleszól a populáció változásába, és tizedeli mind a zsákmány, mind pedig a ragadozó állományát:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y - v \cdot x$$

$$\frac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y - v \cdot y$$

Ebben az esetben is periodikus megoldásokat kapunk a folyamatokra. Emellett látható, hogy ha vadászat is zajlik, az a zsákmány számára kedvezőbb feltételeket teremt.

Ennek az eredménynek igen érdekes a történelmi háttere. A második világháború folyamán a tengeri ütközetek miatt szünetelt a halászat a Csendes-óceánon. A háború végeztével megkezdték újra a halászást, és meglepődve tapasztalták, hogy arányaiban több ragadozó halat fognak, mint nem ragadozót. Ezzel az érdekes problémával fordultak Volterrához, aki Lotkától függetlenül, de vele egy időben dolgozta ki a később kettőjükről elnevezett modell különféle változatait.



2. ábra: Lotka-Volterra modell két változata, felül a hagyományos, alul pedig a vadászattal kiegészített változat; a bal oldali oszlopban a két faj egyedszámának változása az idő függvényében (a **kék a zsákmány**, a **piros a ragadozó**), a jobb oldali oszlopban pedig a két faj egyedszámának változása egymás függvényében.

Háromszereplős modellek

Ezekben a modellekben már három faj szerepel a populációban, melyeknek különféle viszonyulásaik képzelhetőek el. Itt már megoldó-formulákkal, praktikákkal nem megoldható differenciálegyenlet-rendszerekről beszélünk, emiatt szinte létfontosságú a számítógépes segítség.

Kutatásunk egy jókora hányadában az úgynevezett Harlekin katicák esetével foglalkoztunk. A Harlekin katicákat mezőgazdasági célokból telepítették eredetileg be a rendes katicák mellé, ugyanis sokkal agresszívebben fogyasztotta a levéltetveket. Habár nem az új klímához volt szokva, akklimatizálódott, és mint új csúcsragadozó lépett be a populációba (ugyanis a rendes katicák lárváit is elfogyasztotta). Vizsgálódásunk célja az volt, hogy megtudjuk, vajon mi lesz a Harlekin katicákkal, illetőleg a rendes katicákkal (ki fog-e valamelyik halni, vagy sem).

Ennek az esetnek a vizsgálatához többféle ismert modellt is megvizsgáltunk:

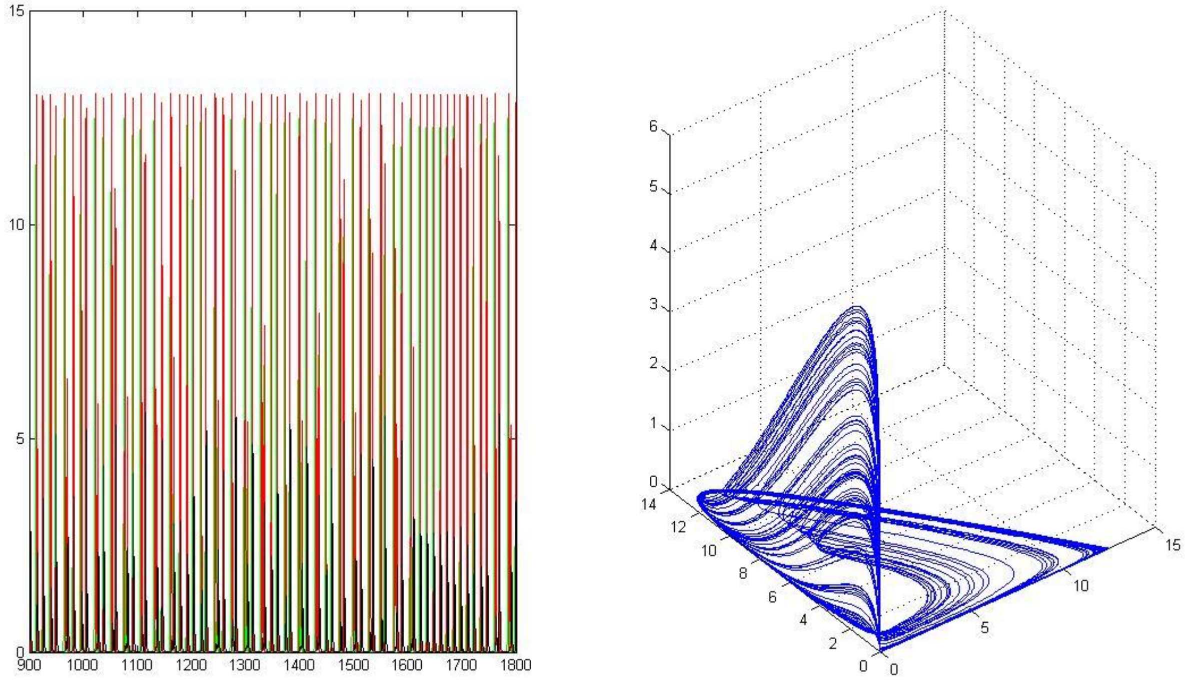
1. *Tanabe-Namba modell:*

   Ezen modell egy olyan alaphelyzetből indul, melyben a csúcsragadozó a zsákmányt is fogyasztja, nemcsak a ragadozót, de a ragadozó csak a zsákmányt eszi meg. Ezen modell a legtriviálisabb kiterjesztése a Lotka-Volterra modellnek, mondhatni az egyik legidealizáltabb háromváltozós modell. Viszont néhány paraméterére igen érzékenyen viselkedik (jelen esetben a felvázolt differenciálegyenlet-rendszerben a c paraméter például ilyen), ami miatt könnyen kaotikusan kezdhet viselkedni.

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y - c \cdot x \cdot z$$

$$\frac{dy}{dt} = -d \cdot y + e \cdot x \cdot y - f \cdot y \cdot z$$

$$\frac{dz}{dt} = -g \cdot z + h \cdot y \cdot z + i \cdot x \cdot z$$



3. ábra: A Tanabe-Namba modell egy lehetséges kaotikus kimenetele; baloldalon az egyes fajok egyedszámának alakulása az idő függvényében; a jobb oldalon pedig az egyes fajok egyedszámának alakulása egymás függvényében (3 dimenzióban).

2. *Hastings-Powell modell:*

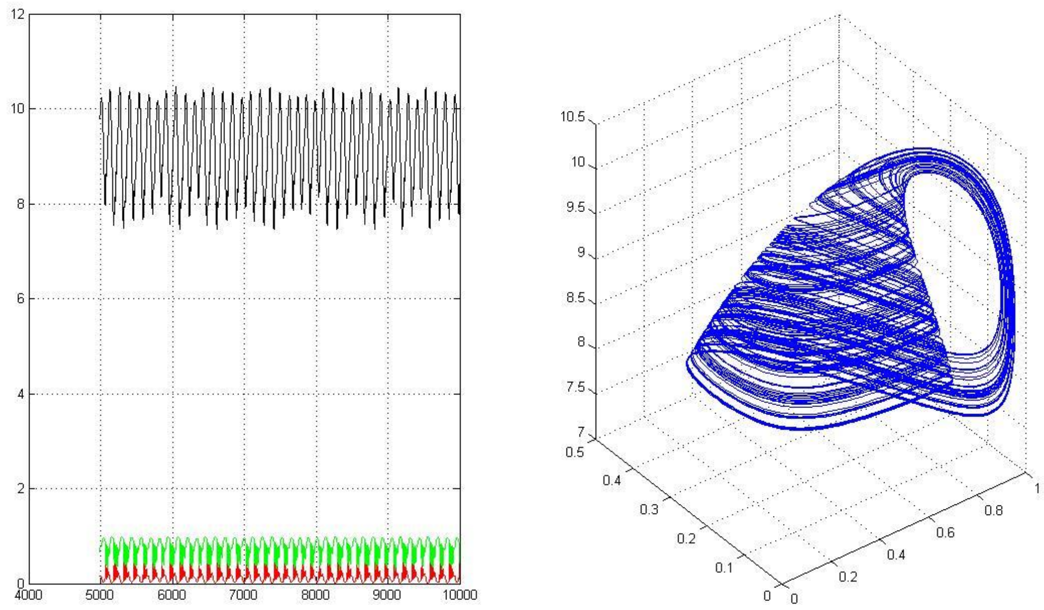
Ez egy alapvető tápláléklánc-struktúrán alapszik: a ragadozó megeszi a zsákmányt, a csúcsragadozó csak a ragadozót eszi meg. Az egyik legelső ilyen háromváltozós modellnek számított 1991-es megjelenésekor. Egy egyszerűsített verziója az alábbi egyenletrendszert vázolja fel:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x \cdot (1 - x) - x \cdot y \cdot \frac{b}{1 + c \cdot x}$$

$$\frac{dy}{dt} = -d \cdot y + x \cdot y \cdot \frac{b}{1 + c \cdot x} - y \cdot z \cdot \frac{e}{1 + f \cdot y}$$

$$\frac{dz}{dt} = -g \cdot z + y \cdot z \cdot \frac{e}{1 + f \cdot y}$$

Eme modell igaz pontosabb, mint a Tanabe-Namba, de a mi esetünkben nem jól használható, mivel nem megfelelő a populáció szerkezete (itt nem fogyasztja a csúcsragadozó a zsákmányt).



4. ábra: A Hastings-Powell modell egy lehetséges kaotikus kimenetele; a baloldalon az egyes fajok egyedszáma az idő függvényében, a jobb oldalon pedig egymás függvényében (3 dimenzióban).

3. *Konkurens ragadozó:*

Ebben az esetben a belépő ragadozó szintén csak a zsákmányt fogyasztja, s konkurens félként jelenik meg az eredeti ragadozó számára. Eme modell akkor lenne jól használható, ha a katicás történetünk a tervezetteknek megfelelően zajlott volna le (tehát, ha mindkét katica csupán a levéltetveket fogyasztaná). Az ide tartozó differenciálegyenlet-rendszer:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y - e \cdot x \cdot z$$

$$\frac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dz}{dt} = -f \cdot z + g \cdot x \cdot z$$

Konklúzió

A kutatások során az egészen egyszerű modellektől kiindulva több igen bonyolult modellig jutottunk, nem csak ismerkedés, hanem vizsgálódás terén is. Megismerkedtünk a differenciálegyenletekkel, és differenciálegyenlet-rendszerekkel, bizonyos megoldási praktikákkal, ötletekkel. Betekintést nyerhettünk a káoszelméletbe, és a fraktálok világába is.

Megismerkedtünk a Matlab nevű programmal, amely kutatásunk során végig hatalmas segítséget nyújtott nekünk. A folyamatos fejlesztéseknek alávetett program a lehetőségek végtelen tárházát rejti magában, nem csak a mi kutatási témánk terén.

Nyilvánvalóvá vált számunkra, hogy a program alapú matematikai modellezés a matematikának egy viszonylag fiatal, és rengeteg kutatási témát, megoldatlan problémán rejt még magában. Mindezen tények arra sarkalltak minket, hogy munkánkat precízen vigyük véghez, s hogy minél jobban megismerkedjünk a Matlabbal, kiaknázzuk eme erőforrást.

Szalai Péter,

Benyó Krisztián

Témavezető: Mincsovics Miklós

Irodalomjegyzék

Alligood, K., Sauer, T., and Yorke, J.: *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*.

Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney: *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*.

Blanchard, P., Devaney, R. L., and Hall, G. R. *Differential Equations*.

Tanabe, K., Namba, T.: *Omnivory creates chaos in simple food web models; Ecology, Vol. 86., No. 12.*

Hastings, A., Powell, T.: *Chaos in a Three-Species Food Chain, Ecology, Vol. 72., No. 3.*

Hatvani László, Pintér Lajos: *Differenciálegyenletes modellek a középiskolákban*

Tartalomjegyzék