C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 793-796, 1998
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Classes de fonctions non quasi-analytiques et existence de sous-espaces invariants

Karim KELLAY [a], Mohamed ZARRABI [b]

[a] Institut de mathématiques, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
Courriel : kellay@math.u-strasbg.fr

[b] Laboratoire de mathématiques, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France
Courriel : zarrabi@math.u-bordeaux.fr

(Reçu le 23 juillet 1998, accepté le 12 août 1998)

Résumé. Nous montrons que certaines classes de fonctions, définies sur un compact du plan complexe de mesure de Lebesgue planaire nulle, sont non quasi-analytiques. Nous traitons plus particulièrement les classes de Carleman et les classes de fonctions ayant une extension asymptotiquement holomorphe. En combinant ceci avec le calcul fonctionnel de Dyn'kin basé sur la formule de Cauchy–Green, nous établissons l'existence de sous-espaces invariants pour des opérateurs dont une partie du spectre est de mesure de Lebesgue planaire nulle, et ce lorsque la résolvante a une croissance modérée au voisinage de cette partie. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Non-quasianalytic classes of functions and existence of invariant subspaces

Abstract. *We prove that some classes of functions defined on a compact set in the complex plane with planar Lebesgue measure zero, are non-quasianalytic. We particularly treat the Carleman classes and classes of functions having asymtotically holomorphic continuation. Combining this with Dyn'kin's functional calculus based on the Cauchy–Green formula, we establish the existence of invariant subspaces for operators for which a part of the spectrum is of planar Lebesgue measure zero, provided that the resolvent has a moderate growth near this part of the spectrum.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Sur la non-quasi-analyticité

Soit E un compact du plan complexe $\mathbb{C}$ de mesure de Lebesgue nulle et soit M une fonction décroissante sur $(0,+\infty)$ avec $M(0+)=+\infty$. On désigne par $C(E)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur E. Soit A un espace de Banach de fonctions définies sur E, qui

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

s'injecte de façon continue dans $C(E)$. On suppose que A contient les constantes et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash E$, la fonction $r_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda - z}$, $z \in E$, appartient à A et

$$\|r_\lambda\|_A \le M(\mathrm{d}(\lambda, E)),$$

où $\mathrm{d}(\lambda, E)$ désigne la distance de λ à E.

Nous donnons une condition sur la croissance de M qui garantit la non-quasi-analyticité de l'espace A, ce qui signifie que pour tout $\zeta \in E$, et pour tout voisinage V de ζ, il existe $f \in A$ dont le support est contenu dans $V \cap E$ et telle que $f(\zeta) \neq 0$.

Comme on peut s'y attendre, cette condition sur M dépend de la géométrie de E et plus précisément de la fonction θ_E définie par :

$$\theta_E(x) = \mathrm{m}_2(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{d}(z, E) < x\}),\ x > 0,$$

où m_2 désigne la mesure de Lebesgue planaire.

Notons que la fonction θ_E est continue, strictement croissante et, puisque $\mathrm{m}_2(E) = 0$, $\theta_E(0+) = 0$.

Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. – *Fixons un $\delta > 0$ tel que $M \circ \theta_E^{-1}(\delta^2) \ge e$. Si*

$$\int_0^\delta (\ln\ln M \circ \theta_E^{-1}(x^2))^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x < +\infty, \tag{1}$$

alors A est non quasi-analytique.

La clé de ce résultat est la normalité de certaines familles de fonctions analytiques. Plus précisément : soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes f sur Ω telle que $|f(z)| \le M(\mathrm{d}(z, E))$, $z \in \Omega$. Nous montrons grâce à un théorème de Lomonosov–Ljubich–Matsaev [7] et Domar [4] que si (1) est vérifié, alors la famille $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$ est normale, c'est-à-dire uniformément bornée sur tout compact de Ω. Notons que dans le cas où E est un segment, le théorème de Sjöberg–Levinson–Domar–Beurling (*voir* [1], [3] et [6]) affirme que la famille $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$ est normale lorsque la condition suivante :

$$\int_0^\delta \ln\ln M(x)\,\mathrm{d}x < +\infty, \tag{2}$$

est satisfaite pour un certain $\delta > 0$ assez petit de sorte que $M(\delta) \ge e$.

Remarque. – Puisqu'on a supposé que A s'injecte continuement dans $C(E)$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\frac{1}{\mathrm{d}(\lambda, E)} \le c\|r_\lambda\|_A$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash E$. Il s'ensuit que $\frac{1}{x} \le cM(x)$ pour x proche de 0. On voit que les hypothèses faites sur A et la condition (1) entraînent que θ_E vérifie

$$\int_0^{\sqrt{\theta_E(e^{-1})}} \left(\ln\ln \frac{1}{\theta_E^{-1}(x^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x < +\infty. \tag{3}$$

2. Exemples d'espaces non quasi-analytiques

Dans cette section nous donnons, grâce au théorème 1, deux exemples de classes de fonctions non quasi-analytiques. Comme dans la section précédente, E désigne un compact du plan complexe de mesure de Lebesgue planaire nulle et M une fonction décroissante définie sur $(0, +\infty)$ telle que $M(0+) = +\infty$.

2.1. *Algèbre de fonctions asymptotiquement holomorphes.* – On désigne par $\mathcal{D}_M(E)$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{C}$ de classe C^1, s'annulant en l'infini et telles que

$$|\overline{\partial} f(z)| = o\left(\frac{1}{M(\mathrm{d}(z,E))}\right) \quad (\mathrm{d}(z,E) \to 0).$$

Ici $z = x + iy$, $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

On considère $\mathcal{Q}_M(E) := \mathcal{D}_M(E)|E$ l'algèbre des restrictions sur E. Cette algèbre a été introduite par Dyn'kin (*voir* [5] et [6]). Elle permet en particulier de définir un calcul fonctionnel « non holomorphe » pour des opérateurs dont la résolvante croît modérément près du spectre. Lorsque E est le cercle unité $\mathbb{T}$, Dyn'kin a montré dans [5] que $\mathcal{Q}_M(\mathbb{T})$ est non quasi-analytique si et seulement si M vérifie la condition (2).

THÉORÈME 2. – *Si θ_E et M vérifient* (3) *et* (1), *alors $\mathcal{Q}_M(E)$ est non quasi-analytique.*

2.2. *Classes de Carleman.* – Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On dit qu'une fonction continue f définie sur E est dans la classe de Carleman $C_E(M_n)$ s'il existe une suite de fonctions $f^{(n)}$, $n \geq 0$, définies sur E et une constante $c(f) > 0$ (qui ne dépend que de f) telles que $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $0 \leq k \leq n$

$$f^{(k)}(\zeta) = f^{(k)}(z) + f^{(k+1)}(z)\frac{\zeta - z}{1!} + \cdots + f^{(n)}(z)\frac{(\zeta - z)^{n-k}}{(n-k)!} + R_{n,k}(\zeta, z),$$

où

$$|R_{n,k}(\zeta, z)| \leq c(f)\, M_{n+1}\frac{|\zeta - z|^{n-k+1}}{(n-k+1)!}, \quad \zeta,\, z \in E. \tag{4}$$

Lorsque E est parfait, les fonctions $f^{(n)}$ sont déterminées de façon unique par la formule

$$f^{(n)}(z) = \lim_{E \ni \zeta \to z} \frac{f^{(n-1)}(\zeta) - f^{(n-1)}(z)}{\zeta - z}, \quad n \geq 1.$$

Lorsque $E = [-1, 1]$ et la suite $(M_n)_n$ est log-convexe, c'est-à-dire $M_n^2 \leq M_{n+1}M_{n-1}\,(n \geq 1)$, le théorème classique de Carleman–Denjoy [9] affirme que $C_E(M_n)$ est non quasi-analytique si et seulement si

$$\sum_{n\geq 1} M_n^{-\frac{1}{n}} < +\infty. \tag{5}$$

Lorsque E est un arc rectifiable, la condition (5) est nécessaire pour la non-quasi-analyticité de $C_E(M_n)$ (*voir* [2]). Nous montrons que si la suite $\left(\frac{M_n}{n!}\right)_n$ est log-convexe, alors la condition

$$\sum_{n\geq 1}\left(M_n^{\frac{1}{n}} \ln M_n\right)^{-\frac{1}{2}} < +\infty$$

est suffisante. Ceci est un cas particulier du résultat général suivant :

THÉORÈME 3. – *Supposons que E est parfait, $\left(\frac{M_n}{n!}\right)_n$ est log-convexe et $\theta_E(x) = O(x^\alpha)$ $(x \to 0)$, où $\alpha \in (0, 1]$. Si*

$$\sum_{n\geq 1}\left(n^{1-\alpha} M_n^{\frac{\alpha}{n}} \ln M_n\right)^{-\frac{1}{2}} < +\infty,$$

alors $C_E(M_n)$ est non quasi-analytique.

Remarque. – Si E est un arc rectifiable, il existe une constante $c > 0$ telle que $c^{-1}x \leq \theta_E(x) \leq cx$, $0 < x < 1$. Notons aussi que lorsque E est le graphe d'une fonction définie sur $[0,1]$ satisfaisant la condition de Hölder d'ordre $\alpha \in (0,1]$, alors $\theta_E(x) = \mathrm{O}(x^\alpha)\,(x \to 0)$.

3. Existence de sous-espaces invariants

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur X. On dit qu'un sous-espace fermé Y de X est *invariant* lorsque $TY \subset Y$ et qu'il est non trivial si $\{0\} \subsetneqq Y \subsetneqq X$. Le sous-espace Y est dit *hyper-invariant* pour T s'il est invariant pour tout opérateur qui commute avec T. Le spectre de T est noté par $\mathrm{Sp}(T)$. Ljubich et Matsaev [8] ont montré que : s'il existe un ouvert O de $\mathbb{C}$ et un arc E de classe C^2 tel que $\mathrm{Sp}(T) \cap O = E \cap O$ et si la fonction

$$M(x) = \sup\{\|(z-T)^{-1}\| : \mathrm{d}(z,E) \geq x,\ z \in O\}, \quad x > 0, \tag{6}$$

satisfait (2), alors T admet un sous-espace hyper-invariant non trivial. Nous donnons ici un résultat de même nature que celui de Ljubich–Matsaev, mais pour des opérateurs à spectre non nécessairement contenus dans un arc assez régulier; plus précisément :

THÉORÈME 4. – *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'il existe E un compact parfait de mesure de Lebesgue planaire nulle et un ouvert O de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Sp}(T) \cap O$ contient au moins deux points distincts et $\mathrm{Sp}(T) \cap O \subset E \cap O$. Si θ_E et la fonction M définie par* (6) *vérifient* (3) *et* (1), *alors T admet un sous-espace hyper-invariant non trivial.*

Pour obtenir ce résultat nous utilisons deux éléments : le premier est le résultat sur la non-quasi-analyticité de la classe $\mathcal{Q}_M(E)$ énoncée dans le théorème 2; le second est le calcul fonctionnel introduit par Dyn'kin dans [6] qui est défini de la manière suivante : soit f une fonction définie sur un voisinage ouvert V de $\mathrm{Sp}(T)$, de classe C^1 et telle que

$$|\bar{\partial} f(z)|\,\|(z-T)^{-1}\| \to 0,\ \mathrm{d}(z, \mathrm{Sp}(T)) \to 0.$$

On pose

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta} f(\zeta)(\zeta-T)^{-1}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta\setminus \mathrm{Sp}(T)} \bar{\partial} f(\zeta)(\zeta-T)^{-1}\mathrm{dm}_2(\zeta),$$

où Δ est un domaine tel que $\mathrm{Sp}(T) \subset \Delta$, $\overline{\Delta} \subset V$ et dont le bord, $\partial\Delta$, est une union finie de courbes de Jordan disjointes, de classe C^1 par morceaux.

Grâce à la formule de Cauchy–Green, $f(T)$ est indépendant du choix de Δ.

Références bibliographiques

[1] Beurling A., Analytic continuation across a linear boundary, Acta Math. 128 (1972) 154–182.
[2] Brennan J.E., Approximation in the map by polynomials on non-Carathéodory domains, Ark. Math. 15 (1977) 117–168.
[3] Domar Y., On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function, Ark. Math. 3 (1958) 429–440.
[4] Domar Y., Uniform boundedness in families related to subharmonic functions, J. London Math. Soc. 38 (2) (1988) 485–491.
[5] Dyn'kin E.M., Functions with given estimate for $\partial f/\partial\bar{z}$, and Levinson's theorem, Math. USSE Sb. 18 (1972) 181–189.
[6] Dyn'kin E.M., An operator calculus based on the Cauchy–Green formula, J. Soviet Math. 4 (1975) 329–334.
[7] Lomonosov V.I., Ljubich Ju.I., Matsaev V.I., Duality of spectral subspaces and condition for the separation of the spectrum of a bounded linear operator, Dokl. Akad. Nauk SSSR 216 (1974) 737–739.
[8] Ljubich Ju.I., Matsaev V.I., Operators with separable spectrum, Amer. Math. Soc. Trans. 47 (1965) 89–129.
[9] Mandelbrojt S., Séries adhérentes, régularisations des suites, applications, Gauthier–Villars, Paris, 1952.