

Mathématiques pour Informaticiens – Corrigé Série 1

1. $x - y = (-3, 1, -5)$ donc

$$\|x - y\|_1 = 9, \quad \|x - y\|_2 = \sqrt{35}, \quad \|x - y\|_{+\infty} = 5.$$

2. (a) $\|\lambda x\| = \lambda^2 \|x\| \neq \lambda \|x\|$ si $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0, 1, -1$. Ce n'est pas une norme.

(b) $\|(1, 1/2)\| = 0$ donc ce n'est pas une norme.

(c) $\|(0, x_2)\| = 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$ donc ce n'est pas une norme.

(d) C'est une norme. En effet, $(x_1, x_2) \mapsto \max(x_1, x_2)$ est la norme ℓ^∞ de \mathbb{R}^2 . De plus $(x_1, x_2) \mapsto |x_1|$ est une semi-norme *i.e.* a toutes les propriétés d'une norme excepté que $|x_1| = 0$ n'implique pas $x = 0$. La somme d'une norme et d'une semi-norme est toujours une norme.

3. Nous avons

$$2 \min(|x_1|, |x_2|) + 3 \max(|x_1|, |x_2|) = 2(|x_1| + |x_2|) + \max(|x_1|, |x_2|).$$

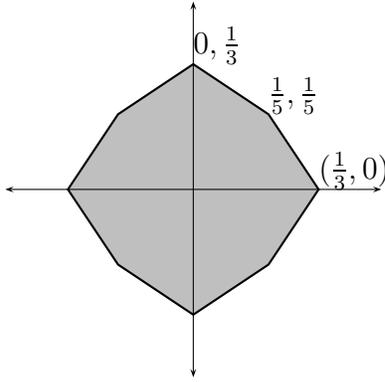
C'est la somme de deux normes (la norme ℓ^∞ et la norme ℓ^1). Donc, c'est une norme.

Pour dessiner le disque unité, il suffit de remarquer que $\|(x_1, x_2)\| = \|(x_1, -x_2)\| = \|(-x_1, x_2)\| = \|(-x_1, -x_2)\|$. Il suffit donc dessiner le disque unité dans un quadrant. Supposons x_1 et x_2 positifs. Il y a deux cas à considérer

– $x_1 \leq x_2$, dans ce cas, l'équation est $2x_1 + 3x_2 \leq 1$.

– $x_2 \leq x_1$, l'équation est $3x_1 + 2x_2 \leq 1$.

Par conséquent, le disque unité pour cette norme est l'intérieur (au sens géométrique pas topologique) du polygône de sommets $(\frac{1}{3}, 0)$, $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(0, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(-\frac{1}{3}, 0)$, $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$, $(0, -\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$.



On a

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{2} \max(x_1, x_2) \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \|x\|.$$

donc $C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ convient.

Pour calculer C_2 :

$$\|x\| \leq 3(|x_1| + |x_2|) \leq 3\sqrt{2} \|x\|,$$

par Cauchy-Schwarz donc $C_2 = 3\sqrt{2}$ convient.

4. Nous avons

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

Comme $n^{\frac{1}{p}}$ converge vers 1, on a par le théorème des encadrements ou des gendarmes que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

5. $x = x - y + y$ donc $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ et $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. On inverse les rôles de x et de y . On obtient : $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. D'où $|\|y\| - \|x\|| \leq \|x - y\|$.
6. A fermé, B ouvert, C_1 ouvert borné, C_2 ouvert borné, D ni ouvert ni borné ni fermé, E borné, F fermé.