

Mathématiques pour Informaticiens – Série 1

1. *2 points* Calculer la distance $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ entre les deux points $\mathbf{x} = (-1, 2, -1)$ et $\mathbf{y} = (1, 3, 2)$ en utilisant les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
2. *8 points* Pour chacune des définitions suivantes, déterminer si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 ou non, et justifier vos conclusions.
 - (a) $\|\mathbf{x}\| = (|x_1| + |x_2|)^2$,
 - (b) $\|\mathbf{x}\| = |x_1 - x_2|$,
 - (c) $\|\mathbf{x}\| = 3|x_1| + \min(|x_1|, |x_2|)$,
 - (d) $\|\mathbf{x}\| = 3|x_1| + \max(|x_1|, |x_2|)$.
3. *7 points* Vérifier que

$$\|x\| = \min(|x_1|, |x_2|) + 2 \max(|x_1|, |x_2|)$$

est une norme sur \mathbb{R}^2 . Dessiner le disque unité

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| \leq 1\}.$$

Démontrer que cette norme est équivalente à la norme euclidienne, c.-à-d. trouver des constantes positives C_1, C_2 telles que

$$C_1 \cdot \|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_2 \cdot \|x\|_2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

4. *10 points* Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

5. *6 points* Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

6. 7 points Dessiner les ensembles suivants, et déterminer s'ils sont ouverts, fermés, bornés :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -4 \leq y \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \cdot y < -0.5\},$$

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < \|x\|_2 < 2\},$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \|x\|_2 < 3\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + x + y > 1 \text{ ou } x^2 + y^4 = 0\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 1/n, y = e^{-\sqrt{n}}, n = 1, 2, \dots\},$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 1/n, y = \sqrt{n}, n = 1, 2, \dots\}.$$

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

- Les exercices
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.

Assistant : Kévin Santugini

Adresse électronique : Kevin.Santugini@math.unige.ch

Page web : <http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement>