

---

**Mathématiques pour Informaticiens – Série 3**

1. *6pts* Pour chacune des suites de fonctions suivantes, trouver la fonction limite (c.-à-d. une fonction  $f$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ). Ensuite, déterminer si la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^2$ .

(a)  $f_n(x, y) = \begin{cases} (1 - n|x - \frac{1}{n}|)^2 \sin(y) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

(b)  $f_n(x, y) = (\sin(x) \sin(y))^{2n}$ ,

(c)

$$f_n(x, y) = \begin{cases} |x - \frac{1}{2}|^n \sin(y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. *4pts* Déterminer si les matrices **A** et **B** suivantes sont orthogonales, et si les matrices **C** et **D** sont unitaires.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ i & -2i \end{bmatrix}.$$

3. *5pts* Soit l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

En considérant une nouvelle base

$$S_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de  $\mathbb{R}^3$  et une nouvelle base

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de  $\mathbb{R}^2$ , calculer la matrice représentant  $f$  dans ces nouvelles bases ?

4. *5pts* Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale  $\mathbf{U}$  telle que  $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$  soit sous forme triangulaire.

5. *5pts* Effectuer la décomposition de Schur en version complexe de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

**Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :**

- Les exercices
  - Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.
- La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.