UNIVERSITE DE GENEVE
Faculté des sciences
À rendre pour le jeudi 19 avril 2007

Section de mathématiques
jeudi 5 avril 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 4

1. *3 points Considérons la matrice suivante :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calculer les normes $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ *et* $\|\mathbf{A}\|_2$. $\|\mathbf{A}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{A}\|_1 = \sqrt{14 + \sqrt{90}}$.

2. *3 points Pour tout vecteur* $x \in \mathbb{R}^n$, *on sait que* $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. *Toutefois cette inégalité n'est pas vraie pour les matrices. Trouver un matrice* $\mathbf{A}$ *telle que*

$$\|\mathbf{A}\|_2 > \|\mathbf{A}\|_1.$$

Un exemple avec une matrice 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En effet, $\|\mathbf{A}\|_1 = 1$ et $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{2}$

3. *3 points Démontrer que, pour qu'une matrice soit définie positive, il est nécessaire, mais pas suffisant, que tous les éléments de la diagonale soient strictement positifs.* Par définition, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, cela est vrai pour les vecteurs de la base canonique $\boldsymbol{e}_i$. Donc, $a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{e}_i > 0$.

4. *3 points Considérons la matrice suivante :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est définie positive de deux façons distinctes :

– *en calculant les valeurs propres explicitement,* Les valeurs propres sont 1.35, 3 et 6.65.
– *en calculant seulement des déterminants de sous-matrices.* Nous avons

$$\begin{vmatrix}5\end{vmatrix} = 5.$$
$$\begin{vmatrix}5 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix} = 16.$$
$$\begin{vmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = 27.$$

5. *Le but de cet exercice est de démontrer l'existence de la décomposition réelle de Schur. Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice à coefficients réels. Il existe une matrice réelle et orthogonale* $\mathbf{U}$ *telle que :*

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{\Lambda}_n \end{bmatrix}$$

où $\boldsymbol{\Lambda}_j$ *est soit la matrice de dimension* 1 $[\lambda_j]$, *soit la matrice* $\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j/\nu_j \\ -\nu_j\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$ *de dimension 2. Les valeurs propres de* $\mathbf{A}$ *sont* λ_j *et* $\alpha_j \pm i\beta_j$. *Le réel* ν_j *sera donné au point b).*

(a) *3 points Soit* λ_1 *une valeur propre de* $\mathbf{A}$, *supposer* λ_1 *réelle. Considérer* $\boldsymbol{v}_1$ *un vecteur propre associé à* λ_1 *et montrer que l'on peut choisir* $\mathbf{U}_1$ *orthogonale telle que la première colonne de* $\mathbf{U}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}_1$ *ait la forme souhaitée.* Soit $\boldsymbol{v}_1$ un vecteur propre réel unitaire associé à une valeur propre réelle. On choisit $\mathbf{U}_1$ une matrice orthogonale dont la première colonne est $\boldsymbol{v}_1$.

(b) *6 points Supposer* $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ *non réel, i.e.* $\beta_1 \neq 0$. *Soit un vecteur propre* $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + i\nu_1\boldsymbol{w}_1$ *avec* $\|\boldsymbol{u}_1\|_2 = \|\boldsymbol{w}_1\|_2 = 1$. *Montrer que l'on peut choisir* $\boldsymbol{v}_1$ *de façon à ce que* $\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w}_1 = 0$. *Compléter la base orthonormale* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_1$ *et montrer que l'on peut choisir* $\mathbf{U}_1$ *orthogonale telle que les deux premières colonnes de* $\mathbf{U}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}_1$ *aient la forme souhaitée.* Soit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{w}$ un vecteur propre complexe associé à la valeur propre $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$. On peut supposer $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{w}$. En effet, pour tout μ, $(1+i\mu)\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} - \mu\boldsymbol{w}) + i(\mu\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$ est aussi un vecteur propre et on peut choisir μ réel positif de manière à ce que $(\boldsymbol{u} - \mu \boldsymbol{w}) \cdot (\mu \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = 0$. Le produit scalaire est donné par

$$-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \mu^2 + (\|\boldsymbol{u}\|_2^2 - \|\boldsymbol{w}\|_2^2)\mu + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}.$$

qui a toujours une solution réelle positive. On pose alors $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2}$, $\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|_2}$, et $\nu = \frac{\|\boldsymbol{w}\|_2}{\|\boldsymbol{u}\|_2}$. Le vecteur $\boldsymbol{u}_1 + i\nu \boldsymbol{w}_1$ est un vecteur propre et vérifie

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{u}_1 + i\nu \boldsymbol{w}_1) = (\alpha + i\beta)\boldsymbol{u}_1 + i\nu \boldsymbol{w}_1.$$

Donc, en identifiant partie réelles et complexes (car $\mathbf{A}$ est réelle),

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{u}_1 &= \alpha \boldsymbol{u}_1 - \beta\nu \boldsymbol{w}_1, \\ \mathbf{A}\boldsymbol{w}_1 &= \frac{\beta}{\nu}\boldsymbol{u}_1 + \alpha \boldsymbol{w}_1. \end{aligned}$$

On choisit alors $\mathbf{U}$ unitaire et ayant pour deux premère colonnes $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{w}_1$.

(c) *4 points Réitérer le raisonnement*. Supposons que nous disposions de $\mathbf{U}_p$ unitaire telle que $\mathbf{A}_p = \mathbf{U}_p^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{U}_p$ ait la forme souhaitée jusqu'aux p premières colonnes. On peut alors appliquer le raisonnement précédent sur la matrice carrée constituée des $n - p$ dernière lignes et dernières colonnes de $\mathbf{A}_p$ et obtenir un $\mathbf{U}'_{p+1}$. Définissons la matrice

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}'_{p+1}. & \end{bmatrix}$$

La matrix $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{V}$ vérifie alors la propriété souhaitée jusqu'au $p+1$ ou $p+2$ premières colonnes et nous pouvons conclure par induction.

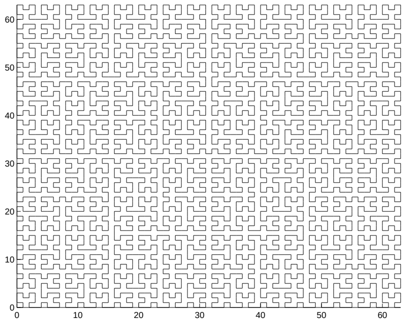
6. *10 points En utilisant le langage de programmation de votre choix (par exemple Matlab), écrire un programme qui dessine la courbe de Peano-Hilbert. La description d'un algorithme récursif vous sera donnée durant la session d'exercices.* Voici le programme Matlab ;

```
function [x,y]=peano_hilbert
if n\leq0
x=0;
y=0;
end
else
[x0, y0]=peano(n-1);
```

```
        x=[y0-0.5,x0-0.5, x0+0.5, -y0+0.5]/2;
        y=[x0-0.5,y0+0.5, y0+0.5, -x0-0.5]/2;
end

plot(x,y,'-');
```

Voici un exemple de courbes de Hilbert pour $n = 6$:



Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

- Les exercices
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.