UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — jeudi 19 avril 2007

Mathématiques pour Informaticiens – Série 5

1. *6 points* Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$. Démontrer que :

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$
$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}.$$

   Indication : procéder comme dans la démonstration du cas $\|A\|_1$ donnée au cours.

2. *6 points* Considérons la forme quadratique suivante

$$f(\boldsymbol{x}) = 2{x_1}^2 - 6x_1x_2 + 2{x_2}^2 + 2x_2.$$

   Réécrire $f(\boldsymbol{x})$ sous la forme matricielle

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}.$$

   Utiliser une rotation et une translation pour obtenir une forme simplifiée. Déterminer alors si l'équation $f(\boldsymbol{x}) = 0$ représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

3. *4 points* Considérons la fonction quadratique $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ sur $\boldsymbol{R}^n$. Démontrer que le gradient de f est donnée par

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\boldsymbol{x}.$$

   Indication : il peut être utile de commencer par calculer la dérivée de f explicitement dans le cas $n = 2$.

4. *4 points* L'opérateur de Laplace Δ d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ se définit comme suit :

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

   L'équation de Laplace, $\Delta u = 0$, peut être utilisée entre autre pour modéliser la distribution stable de température, en l'absence de source de chaleur. Montrer que, pour les fonctions suivantes, l'équation de Laplace est satisfaite pour tout $x \neq 0$.

(a) $u(\boldsymbol{x}) = \ln(\|\boldsymbol{x}\|_2)$ dans $\mathbb{R}^2$

(b) $u(\boldsymbol{x}) = 1/\|\boldsymbol{x}\|_2$ dans $\mathbb{R}^3$

Quelles sont les solutions de $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}$?

5. *5 points* Soit $u(x, y)$ une fonction deux fois différentiable, et soit

$$w(r, \theta) = u(r \cos \theta,\ r \sin \theta).$$

En utilisant la règle de la dérivation en chaîne, démontrer l'égalité suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

6. *5 points* Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(e^{ax} \cos(y),\ e^{bx} \sin(y) \right),$$

où a et b sont des constantes strictement positives. Calculer la matrice jacobienne $f'(x_0, y_0)$ (matrice 2 par 2). Montrer que, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne est inversible.

Évaluation du cours Mathématiques pour Informaticiens :

– Les exercices

– Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : 30% exercices et 70% examen oral.