UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences

Mathématiques pour Informaticiens – Série 6
SOLUTIONS

1. **Rappel:** $O(g(x, y))$ représente une fonction qui vérifie

$$\limsup_{(x,y)\to 0} \left| \frac{O(g(x, y))}{g(x, y)} \right| < +\infty.$$

C'est une notation pratique poour calculer rapidement et rigoureusement les développements limités.

D'abord, autour de $(0, 0)$

$$\sin(x) = x + O(x^3),$$
$$\exp(-2x + 3y) = 1 + (-2x + 3y) + O(x^2) + O(y^2).$$

On multiplie les deux développements et on obtient

$$f(x, y) = x + 3xy - 2x^2 + O(|x|^3) + O(|y|^3).$$

Autour d'un point (x, y) quelconque, c'est plus compliqué:

$$\sin(x + h) = \sin(x) + \cos(x)h - \frac{\sin(x)}{2}h^2 + O(|h|^3),$$
$$\exp(-2(x + h) + 3(y + k)) = \exp(-2x + 3y)(1 - 2h + 3k + \frac{1}{2}(-2h + 3k)^2) + \dots$$
$$\dots + O(|k|^3) + O(|h|^3).$$

On multiplie les deux développements sans calculer explicitement les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 et on regroupe les termes de même ordre. Cela donne

$$f(x+h, y+k) = \exp(-2x+3y)(\sin(x)+(\cos(x)-2\sin(x))h+3\sin(x)k+\dots$$
$$\dots + (\frac{3}{2}\sin(x) - 2\cos(x))h^2 + \dots$$
$$\dots + (3\cos(x) - 6\sin(x))kh + \frac{9}{2}\sin(x)k^2) + O(|h|^3) + O(|k|^3).$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x par $\pi/3$ et y par 1.

2. En calculant les dérivées secondes mixtes, on obtient quel que soit l'ordre de dérivation (d'abord suivant x ou d'abord suivant y):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2(y\cos(y)+(1-2xy)\sin(y))\exp(-2xy)+2y.(xy-1)\sin(y)\exp(-xy)-y\,\mathrm{co}$$

3. On pose

$$F(x,y,z) = z^2x - 2\sin(xy) + 3\cos(zx) - 3,$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,0) &= 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,0) &= -2,\\
\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, On peut écrire $y = g(x,z)$ avec g $\mathcal{C}^\infty$. Ce n'est pas possible dans les autres cas.

4. Pour vérifier si le théoréme d'inversion locale s'applique, on calcule le déterminant de la matrice jacobienne qui doit être différent de 0.

$$\begin{aligned}
J(x,y) &= \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ \cos x & \sin y \end{bmatrix}\\
&= 2(x\sin y - y\cos x)
\end{aligned}$$

En évaluant à chacun des points proposés, on obtient

$$\begin{aligned}
J(0,0) &= 0, & J(\pi,\pi/2) &= 3\pi,\\
J(\pi/2,\pi) &= 0, & J(\pi/2,\pi/2) &= \pi,\\
J(\pi/4,\pi/4) &= 0.
\end{aligned}$$

Donc, on peut inverser localement les fonctions autour des points $(\pi,\pi/2)$, et $(\pi/2,\pi/2)$.