UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — Mercredi 26 octobre 2005

À rendre pour la fin de la séance du Mercredi 2 novembre 2005

Méthodes itératives – Série 1

Exercice 1 Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée de taille n. Il est rappelé que le rayon spectral de $\mathbf{A}$ noté $\rho(\mathbf{A})$ est défini par

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \lambda(\mathbf{A})} (|\lambda|),$$

où $\lambda(\mathbf{A})$ est le spectre de $\mathbf{A}$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\mathbf{A}\| \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon$.

b) Montrer que pour toute norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$, $\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

c) On suppose $\mathbf{A} - \mathrm{I}_n$ inversible. En utilisant a) ou b), montrer que la suite $\boldsymbol{u}$ définie par

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{u}_{n+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{c},$$

converge pour tout choix de $\boldsymbol{x}$ si et seulement si $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

Exercice 2 On définit pour $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < +\infty$ les normes :

$$\|\boldsymbol{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max_{1|eqi \leq n} \{|u_i|\}.$$

Pour une matrice $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{M}_{n,m}$, on définit les normes $\| \ \|_{pq}$ par

$$\|\mathbf{A}\|_{pq} = \sup_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_q},$$

pour $1 \leq p, q \leq +\infty$. La norme $\| \ \|_{pp}$ se note simplement $\| \ \|_p$. On définit aussi la norme de Frobenius :

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {a_{ij}}^2.$$

a) Montrer que

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|,$$
$$\|\mathbf{A}\|_2 = [\rho(\mathbf{A^H A})]^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\mathbf{A}\|_F = [\mathrm{tr}(\mathbf{A^H A})]^{\frac{1}{2}} = [\mathrm{tr}(\mathbf{A A^H})]^{\frac{1}{2}},$$

b) Montrer que la norme de Frobenius vérifie :

$$\|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}\|_F$$

Exercice 3 Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction de U ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. La méthode de Newton est la construction d'une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le choix de $\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - (\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n))^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n).$$

a) Dans le cas où $n = 1$, expliquer pourquoi on appelle aussi cette méthode, la méthode de la tangente.

b) Démontrer que la méthode de Newton converge localement à une vitesse quadratique. *I.e.* soit $\boldsymbol{x}_0 \in U$, $r > 0$ tels que $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\overline{B(\boldsymbol{x}_0, r)}$ et différentiable sur $B(\boldsymbol{x}, r)$. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma, h > 0$, $h = \frac{\alpha\beta\gamma}{2} < 1$, $r = \frac{\alpha}{1-h}$ tels que :

(1) $\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leq \gamma \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ dans $B(\boldsymbol{x}, r)$.

(2) $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est inversible et $\|(\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}\| \leq \beta$ pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $B(\boldsymbol{x}, r)$.

(3) $(\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\| \leq \alpha$ pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $B(\boldsymbol{x}, r)$.

Questions :

i.) Montrer que si pour $j \in \{1, \dots, k\}$, $\boldsymbol{x}_j$ appartient à $B(\boldsymbol{x}, r)$, alors :
$$\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\| \leq \frac{\beta\gamma}{2} \|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\|^2.$$

ii.) En déduire par récurrence que $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\| \leq \alpha h^{2^k - 1}$, et que $\boldsymbol{x}_k$ appartient pour tout $k \in \mathbb{N}$ à $B(\boldsymbol{x}_0, r)$.

iii.) En déduite que la suite $(\boldsymbol{x}_k)_k$ converge vers une limite ξ et que : $\|\boldsymbol{x}_k - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}}$.

iv.) Montrer que $\boldsymbol{f}(\xi) = \mathbf{0}$.

Indication : On pourra utiliser l'implication : si sur un convexe C, $\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leq \gamma \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ alors $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq \frac{\gamma}{2} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$.

c) Implémenter la méthode de Newton en `MATLAB` en dimension n.
Utiliser l'interface : `Newton(f,fp,x0,tol,maxiter)` où :

- `f` est la fonction dont on cherche un zéro,
- `fp` est la fonction Jacobienne de `f`,
- `x0` est le choix initial.
- `tol` est l'erreur finale souhaitée et vaut par défaut 10^{-6},
- `maxiter` le nombre maximal d'itérations et vaut par défaut 100.

Evaluation du cours Méthodes itératives :

- Un contrôle continu sur les exercices, en mai ou juin.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(note contrôle cont.) + $\frac{4}{5}$(note exa. oral).