UNIVERSITE DE GENEVE Section de mathématiques
Faculté des sciences Mercredi 9 novembre 2005
À rendre au début de la séance du Mercredi 23 novembre 2005

Méthodes itératives – Série 2

Exercice 1 Soit $p \in \mathbb{N}^+$. Montrer que,

a) si $0 < \rho < 1$,

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{p} \rho^k = 0$$

b)

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{p}^{\frac{1}{k}} = 1$$

Exercice 2 Soit $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice carrée dont le rayon spectral $\rho(\mathbf{B})$ vérifie $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Montrer que $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ est inversible et que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{B}^j.$$

Cette série est un cas particulier de série de Neumann (généralisation aux matrices carrée des séries entières).

Exercice 3 a) Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice normale. On suppose que le spectre de $\mathbf{A}$, noté $\lambda(\mathbf{A})$ est réel. Montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$.

b) Soit $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$. On suppose que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ est normale. Montrer que l'erreur d'une matrice itérative stationnaire associée à cette décomposition vérifie

$$\|\boldsymbol{e}_k\|_2 \leq (\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}))^k \|\boldsymbol{e}_0\|_2.$$

Exercice 4 Pour $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}^{+,*}$, on note $n = n_x n_y$. On définit la matrice $\mathbf{A}$ carrée de taille $n_x n_y$ du Laplacien discrétisé par :

$$A = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
-4 & 1 & & & 1 & & & & \\
1 & -4 & \ddots & & & 1 & & & \\
 & \ddots & \ddots & 1 & & & \ddots & & \\
 & & 1 & -4 & & & & 1 & \\
\hline
1 & & & & -4 & 1 & & & \ddots \\
 & 1 & & & 1 & -4 & \ddots & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 1 & \\
 & & & 1 & & & 1 & -4 & \\
\hline
 & & & & \ddots & & & & \ddots
\end{array}\right].$$

Les blocs étant de taille $n_x \times n_x$. On dit qu'une matrice carrée $\mathbf{B}$ a la propriété A s'il existe une matrice de permutation $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{F} \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ sont diagonales. Montrer que la matrice du Laplacien discrétisé en 2D a la propriété A.

Exercice 5 a) Implémenter les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en `MATLAB`. On emploiera

```
[x,res]=Jacobi(A,b,x0,tol,maxiter)
% JACOBI Résolution de systèmes linéaires par méthode de Jacobi
%  [x,res]=JACOBI(A,b,x0,tol,maxiter) résoud Ax=b par la méthode
%  de Jacobi en utilisant x0 pour choix initial. L'algorithme
%  s'arrête quand maxiter opérations ont été effectuées ou que la
%  norme 2 du résidu relatif devient plus petite que tol. La
%  variable de sortie res est un vecteur contenant l'historique
%   des normes des résidus.
```

Faire de même pour Gauss-Seidel et SOR.

b) Appliquer ces codes sur la matrice du Laplacien discrétisé. $\mathbf{A}$ (voir exercice précédent) avec second pour membre $b = [1, 1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$.

c) Appliquer ces codes sur la matrice d'advection-diffusion discrétisée $\mathbf{B}$ définie par

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \alpha\mathbf{C},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (on prendra ici $\alpha = 1$) et $\mathbf{C}$ est la matrice d'advection définie par :

$$C = \frac{1}{h}\left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
-1 & 1 & & & & & & & \\
 & -1 & \ddots & & & & & & \\
 & & \ddots & 1 & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & 1 & & & \\
 & & & & & -1 & \ddots & & \\
 & & & & & & \ddots & 1 & \\
 & & & & & & & -1 & \\
\hline
 & & & & & & & & \ddots
\end{array}\right].$$

Évaluation du cours Méthodes itératives :

- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).