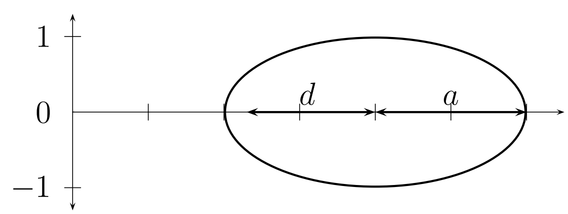
UNIVERSITE DE GENEVE
Faculté des sciences

Section de mathématiques
Mercredi 11 janvier 2006

À rendre au début de la séance du Mercredi 25 janvier 2006

Méthodes itératives – Série 5

1. Soit $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ qui à $\boldsymbol{x}$ associe $\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}}$ définit une norme.
2. Montrer que si $\mathbf{A}$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres appartiennent à l'ellipse



de centre $(c, 0)$, d'excentricité d/a et de demi-grand axe a alors pour k grand, la solution approchée $\boldsymbol{x}_k$ obtenue par l'algorithme GMRES vérifie

$$\frac{\|\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{x}_k\|_2}{\|\boldsymbol{b}\|_2} \le \mathcal{K}(S)\left(\frac{a+\sqrt{a^2-d^2}}{c+\sqrt{c^2-d^2}}\right)^k .$$

3. Le but de cette exercice est de retrouver l'algorithme du gradient conjugué par une méthode géométrique (chercher 'conjugate gradient method without the agonizing pain' avec google). On suppose que $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive.
   (a) La méthode de Richardson revient à appliquer l'algorithme suivant : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha\boldsymbol{d}_k$ avec un scalaire α constant et $\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}_k$. Dans la méthode de pente maximale, on s'autorise à remplacer α par un α_k optimisé à chaque itération. Calculer le scalaire α_k optimal en fonction de $\boldsymbol{d}_k$, $\boldsymbol{x}_k$ et $\mathbf{A}_k$ pour la minimisation de la fonctionnelle $x^T Ax/2 - b^T x$ (voir Lax-Milgram).
   (b) On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/64 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dessiner les lignes de niveaux de la forme quadratique $(x^2/128 + y^2/2 - 4x$, puis tracer les segments successifs $[x_k, x_{k+1}]$ de la méthode de (a). Expliquer pourquoi l'algorithme de pente maximale est très mauvais sur cet exemple.
   (c) On cherche maintenant un algorithme itératif où les directions $\boldsymbol{d}_k$ sont données et forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Calculer α_k pour que l'erreur $\boldsymbol{e}_{k+1} = \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k+1} - \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ soit orthogonale à $\boldsymbol{d}_k$. Montrer que l'algorithme décrit converge en au plus n itérations. Expliquer pourquoi cet algorithme idéal en théorie n'est pas implémentable.

(d) Pour rendre l'algorithme précédent praticable, on considère une suite de directions $\boldsymbol{d}_k$ $\mathbf{A}$ orthogonales. Calculer le α_k pour que l'erreur $\boldsymbol{e}_{k+1}$ soit $\mathbf{A}$ orthogonale avec la direction $\boldsymbol{d}_k$.

(e) Au lieu de se donner d'avance la suite de directions $\boldsymbol{d}_k$, on construit $\boldsymbol{d}_k$ comme le $\mathbf{A}$ orthogonalisé de $\boldsymbol{r}_k$. Montrer, sans utiliser la valeur explicite de α_k, que l'algorithme décrit a les propriétés suivantes :
- Les résidus successifs $\boldsymbol{r}_k$ sont orthogonaux entre eux.
- Les directions successives sont $\mathbf{A}$ orthogonales entre elles.
- $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{d}_0, \ldots, \boldsymbol{d}_{k-1}) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{r}_0, \ldots, \boldsymbol{r}_{k-1}) = \mathcal{K}(\mathbf{A}, \boldsymbol{r}_0, k)$.
- Exprimer $\boldsymbol{r}_{k+1}$ en fonction de $\boldsymbol{r}_k$ et de $\boldsymbol{d}_k$. En déduire que $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k+1}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{d}_j = 0$ pour $j \leq k-2$.
- En déduire qu'il existe β_k telle que $\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k}} + \beta_k \boldsymbol{d}_{k-1}$ puis calculer la valeur de β_k.

(f) Retrouver la forme implémentable de l'algorithme du gradient conjugué.

4. (a) Implémenter l'algorithme du gradient conjugué :

```
function [x,res]=CG(A,b,x0,tol,maxiter)
% CG Résolution de systèmes linéaires par le gradient conjugué
%   [x,res]=CG(A,b,x0,tol,maxiter) résoud le système linéaire Ax=b
%   par la méthode du gradient conjugué ou A est une matrice
%   symétrique. L'algorithme s'arrête quand norm(A*x-b)<=tol*norm(b)
%   ou quand maxiter itérations ont été effectuées.
```

(b) Tester l'algorithme sur la matrice du Laplacien discrétisé $2D$ des exercices précédentes avec second membre

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comparer l'algorithme du gradient conjugué avec GMRES, Jacobi, Gauss-Seidel et SOR.

Évaluation du cours Méthodes itératives :

- Les exercices.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).