Université de Genève — **Analyse numérique**
Faculté des sciences — **Exercices**
Section de mathématiques — **Série 2** — 9 novembre 2006

Exercice 1 *Montrer qu'une formule de quadrature symétrique possède toujours un ordre pair.*

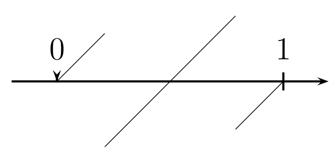
On suppose que l'on a une formule de quadrature symétrique (β_i, γ_i). Elle est toujours exacte sur les monômes impaires. En effet,

$$\int_{-1}^{1} x^{2p+1} \mathrm{d}x = 0$$

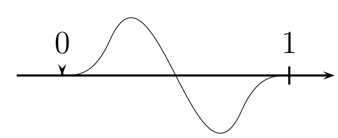
De plus

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \gamma_i^{2p+1} \sum_{i,\gamma_i>0} b_i(\gamma_i^{2p+1} + (-\gamma_i)^{2p+1})$$
$$= 0$$

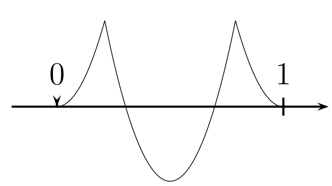
Exercice 2 Dessiner tous les noyaux de Peano $N_1(\tau)$, $N_2(\tau)$, $N_3(\tau), N_4(\tau)$.



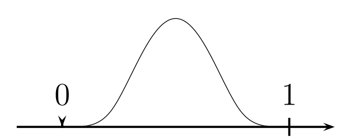
N_1



$100N_3$



$17N_2$



$800N_4$

Exercice 3 *Vérifier par le calcul algébrique la formule de quadrature de Gauss avec $s = 4$ d'ordre 8.* Il faut d'abord calculer les racines du polynôme de Legendre P_4. On cherche à résoudre

$$35X^4 - 30X^2 + 3 = 0.$$

C'est une équation en bicarré. Les solutions vérifient $X^2 = \frac{30\pm\sqrt{480}}{70}$ soit $X^2 = \frac{15\pm 2\sqrt{30}}{35}$. Les quatre racines sont :

$$\{-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}, -\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}, \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}, \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}\}$$

qui sont nos γ_i. Pour obtenir le reste de la formule de Gauss, il reste à résoudre le système suivant :

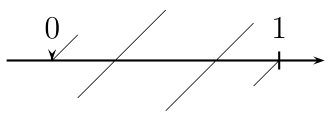
$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 1 \\ \frac{15+2\sqrt{30}}{35}\beta_1 + \frac{15-2\sqrt{30}}{35}\beta_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

C'est équivalent à

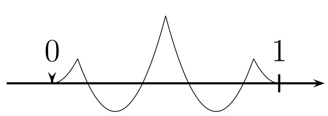
$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 1 \\ \beta_1 - \beta_2 &= -\frac{5\sqrt{30}}{18} \end{aligned}$$

D'où $\beta_1 = \beta_4 = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{30}}{18})$ et $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{30}}{18})$.

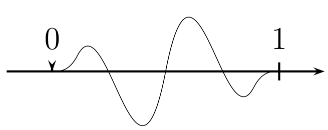
Exercice 4 Avec des bons souvenirs du théorème de Rolle, esquisser l'allure géométrique des noyaux de Peano $N_1(\tau)$, ..., $N_6(\tau)$ de la formule de quadrature d'ordre 6 à $s = 3$ étages ($c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$, $b_1 = b_3 = \frac{5}{18}$, $b_2 = \frac{8}{18}$).



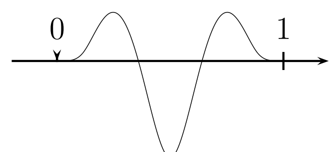
N_1



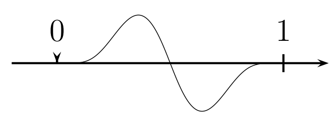
$17N_2$



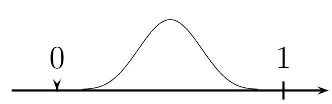
$300N_3$



$5000N_4$



$30000N_5$



$200000N_6$