Université de Genève | **Analyse numérique**
Faculté des sciences | **Exercices**
Section de mathématiques | **Série 4** | 7 décembre 2006

Exercice 1 $*$Démontrer la formule (4.9) du polycopié, c'est-à-dire que pour des formules de quadratures d'ordre 2s,

$$\beta_i = \frac{2}{(1-\gamma_i^2)({P_s}'(\gamma_i))^2}$$

en suivant les étapes (a) à (c) :

(a) Montrer qu'on peut écrire

$$\beta_i = \int_{-1}^{1} \ell_i^2(t)\, dt\,.$$

(b) Observer que

$$\ell_i(t) = \frac{P_s(t)}{(t-\gamma_i)P_s'(\gamma_i)}\,,$$

(c) A partir de (a) et (b), calculer β_i en utilisant

$$\frac{1}{(t-\gamma_i)^2} = -\left(\frac{1}{t-\gamma_i}\right)'$$

Il peut être utile de se rappeler quelques propriétés des polynômes de Legendre.

Exercice 2 (a) Calculer les coefficients de y_0 et y_1 dans $\delta^1 y[x_0,\, x_1]$ et les coefficients de y_0, y_1 et y_2 dans $\delta^2 y[x_0,\, x_1,\, x_2]$; les mettre sous une forme jolie et deviner une loi générale pour tout n.

(b) Pour terminer en beauté, faire une démonstration par récurrence.

(c) Déduire que $\delta^n y[x_0,\, \ldots,\, x_n]$ est une fonction symétrique de ses arguments, c'est-à-dire que, pour toute permutation σ de $\{0,\, 1,\, \ldots,\, n\}$,

$$\delta^n y[x_{\sigma(0)},\, \ldots,\, x_{\sigma(n)}] = \delta^n y[x_0,\, \ldots,\, x_n]\,.$$

Exercice 3 En utilisant la formule des différences divisées, démontrer que

$$\sum_{i=0}^{p} \frac{{x_i}^n}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} = 0$$

dès que $n < p$. (Voir le théorème ci-dessous de la lettre d'Euler à Goldbach du 25 Septembre 1762).

mit der vollkommensten Ehrerbietung lebenslang zu verharren [. . .]

/133/ [P. S.] Theorema. Si habeantur numeri quotcunque inaequales a, b, c, d, etc. ex iisque formentur sequentes fractiones:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}}, \quad \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}}, \quad \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}},$$

$$\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)\text{ etc.}},$$

earum summa semper est $= 0$, si exponens n (quem integrum intelligi oportet) minor sit numero factorum in singulis denominatoribus.

Sin autem ei sit aequalis summa fit $= 1$.

Exempl. Sint numeri propositi 10, 9, 7, 4, 2, erit

$$\frac{10^n}{1\cdot 3\cdot 6\cdot 8} - \frac{9^n}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 7} + \frac{7^n}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \frac{4^n}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \frac{2^n}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 2} = 0$$

Si $n < 4$, at si $n = 4$ summa est $= 1$.

Sit $n = 0$ erit

$\frac{1}{144} - \frac{1}{70} + \frac{1}{90} - \frac{1}{180} + \frac{1}{560} = 0$ est manifestum. In genere fractionibus ad communem denominatorem reductis fit $35\cdot 10^n - 72\cdot 9^n + 56\cdot 7^n - 28\cdot 4^n + 9\cdot 2^n = 0$ dummodo $n < 4$. Dieses theorema scheint nicht wenig merkwürdig zu sein, es deucht mich aber, Ew. Hochwohlgeb. haben mir schon längst dergleichen etwas mitzuteilen geruhet.