Université de Genève	**Analyse numérique**	
Faculté des sciences	**Exercices**	
Section de mathématiques	**Série 4**	7 décembre 2006

Exercice 1 $*$*Formules de Lobatto* Voir la solution dans le corrigé de la série 3.

Exercice 2 (a) Calculer les coefficients de y_0 et y_1 dans $\delta^1 y[x_0,\, x_1]$ et les coefficients de y_0, y_1 et y_2 dans $\delta^2 y[x_0,\, x_1,\, x_2]$; les mettre sous une forme jolie et deviner une loi générale pour tout n. Nous observons que :

$$\delta^1 y[x_0, x_1] = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}$$
$$\delta^2 y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Nous conjecturons donc :

$$\delta^p y[x_0, \ldots, x_p] = \sum_{i=0}^{p} \frac{y_I}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{p} (x_i - x_j)}.$$

(b) *Pour terminer en beauté, faire une démonstration par récurrence.* La formule est vrai quand $p = 1$. Supposons que la formule soit toujours vraie quand $p \leq P$ avec P entier. Montrons qu'elle reste vraie pour $p = P + 1$. Nous avons :

$$\delta^{p+1} y[x_0, \ldots, x_{p+1}] = \frac{\delta^p y[x_1, \ldots, x_{p+1}] - \delta^p y[x_0, \ldots, x_p]}{x_{p+1} - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_{p+1} - x_0} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^{p} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p} (x_i - x_j)} \right) =$$

$$= \frac{y_{p+1}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq p+1}}^{p+1} (x_{p+1} - x_j)} + \frac{y_0}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{p+1} (x_0 - x_j)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \frac{y_i}{x_{p+1} - x_0} \left(\frac{x_i - x_0}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p+1} (x_i - x_j)} - \frac{x_i - x_{p+1}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p+1} (x_i - x_j)} \right) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p+1} (x_i - x_j)}.$$

(c) *En déduire que $\delta^p y[x_0, \ldots, x_p]$ est une fonction symétrique de ses arguments.* La formule obtenue en b) est symétrique donc δ^n est une fonction symétrique.

Exercice 3 *En utilisant la formule des différences divisées, démontrer que $\sum_{i=0}^{p} \frac{{x_i}^n}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} = 0$ dès que $n < p$.* Nous savons par l'exercice précédent que $\sum_{i=0}^{p} \frac{{x_i}^n}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \delta f[x_0, \ldots, x_p]$ où $f : x \mapsto x^n$. Par un théorème du cours, il existe $\xi \in (\min_i(x_i), \max_i(x_i))$ tel que

$$\delta f[x_0, \ldots, x_p] = \frac{1}{p!} f^{(p)}(\xi).$$

Or, si $n < p$, $f^{(p)}$ est la fonction nulle et $f^{(p)}(\xi) = 0$.