UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des sciences — Mercredi 6 novembre 2006

À rendre pour le début de la séance du Mercredi 10 janvier 2006

Optimisation – Série 4

Exercice 1 a) Démontrer que, pour qu'une matrice soit définie positive, il est nécessaire, mais non suffisant, que tous les éléments de la diagonale soient strictement positifs.

b) Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est définie positive de deux façons distinctes :
– en calculant les valeurs propres explicitement,
– en calculant seulement des déterminants de sous-matrices.

Exercice 2 a) Démontrer la formule de Taylor avec reste intégrale. Pour tout f de classe $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x)\frac{h^j}{j!} + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+t)\mathrm{d}t.$$

Indication : Pour ce faire, on pourra procéder par récurrence en utilisant la formule d'intégration par partie.

b) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que :

$$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha|\leq n} \partial^\alpha g(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{h}^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=n+1} \int_0^1 \frac{n+1}{\alpha!}(1-t)^n \partial^\alpha g(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}^\alpha \mathrm{d}t.$$

où α représente un multi-indice $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\boldsymbol{h}^\alpha = h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\ldots, h_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum_i |\alpha_i|$, et $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$. *Indication :* On pourra poser $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})$

c) Soit $\mathcal{S}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\boldsymbol{s}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{s}$ appartient à $\mathcal{S}$ pour tout θ dans $[0,1]$ alors.

i. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable sur $\mathcal{S}$. On suppose que ∇f est Lipschitz continu en $\boldsymbol{x}$ avec constante de Lipshitz $L(\boldsymbol{x})$. Montrer que :

$$|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) - f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{s}| \leq \frac{1}{2} L(\boldsymbol{x}) \|s\|_2^2.$$

ii. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur $\mathcal{S}$. On suppose que la Hessienne de f, H est Lipschitz continu en $\boldsymbol{x}$ avec constante de Lipshitz $L_2(\boldsymbol{x})$. Montrer que :

$$|f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{s}) - f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{s} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{s}, H(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s})| \leq \frac{1}{6} L_2(\boldsymbol{x}) \|s\|_2^3.$$

Exercice 3 Soit β dans $(0,1)$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que ∇f soit Lipschitz avec constante $L(\boldsymbol{x_k})$ pour $\boldsymbol{x}_k$. Soit p_k la direction de descente du gradient. Démontrer que le pas obtenu par la méthode de « line search backtracking »d'Armijo vérifie :

$$\alpha_k \geq \min(\alpha_{init}, \frac{2\tau(\beta-1)p_k^T \nabla f(\boldsymbol{x}_k)}{L(\boldsymbol{x}_k) p_k^T p_k})$$

Exercice 4 a) Implémenter l'algorithme de descente maximale avec line search d'Armijo :

```
function [x,xk]=SteepestDescent(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit)
% STEEPESTDESCENT steepest descent minimum search with Armijo line search
%   [x,xk]=SteepestDescent(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit) finds an
%   approximate minimum of the function f with gradient fp, starting
%   at the initial guess x0. The remaining parameters are optional and
%   default values are used if they are omited. xk contains all the
%    iterates of the method.
```

b) Tester sur les problemes de la première question de la série 3. Qu'observez-vous ?

Dans les exercices d'implémentation

– Afin de préserver l'uniformité des interfaces et permettre le remplacement transparent d'une implémentation par une autre, l'en-tête fourni doit impérativement être respecté et reproduit dans le code. Vous pouvez copiez-collez depuis le PDF disponible sur la page web.
– Les programmes et les résultats doivent être rendus imprimés.

Evaluation du cours d'optimisation

- Les exercices : Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).

Assistant :	Kévin Santugini
Email :	`Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web :	`http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`