UNIVERSITE DE GENEVE — Section de mathématiques

Faculté des Sciences — Mercredi 10 janvier 2007

À rendre pour le début de la séance du Mercredi 24 janvier 2007

Optimisation – Série 5

Exercice 1 a) Vérifier que pour une matrice carré inversible A :

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

b) Démontrer que si la matrice B est symétrique alors B^{-1} et $(B^{\mathrm{T}})^{-1}$ le sont aussi.

c) Soit B une matrice symétrique et $\boldsymbol{b}$ un vecteur. Définissons la fonction f par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} + c. \end{aligned}$$

Démontrer que $\nabla f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + b$

d) Démontrer que si B est symétrique :

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} B\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \leq \lambda_{\max}(B).$$

e) Démontrer que si B est symétrique, alors

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(B^{-1}) &= \frac{1}{\lambda_{\max}(B)} \\ \lambda_{\max}(B^{-2}) &= \frac{1}{\big(\lambda_{\min}(B)\big)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 Méthodes de quasi-Newton : On remplace dans l'algorithme de Newton, la Hessienne $H(\boldsymbol{x}_k)$ (dont le calcul est onéreux) par une matrice approchée B_k. Posons $\boldsymbol{y}_k = \nabla f(\boldsymbol{x}_{k+1}) - \nabla f(\boldsymbol{x}_k)$ et $\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k$. Considérons deux choix :

a) Rang 1 symétrique :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\boldsymbol{y}_k - B_k\boldsymbol{s}_k)(\boldsymbol{y}_k - B_k\boldsymbol{s}_k)^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_k - B_k\boldsymbol{s}_k)}$$

i. Montrer que $B_{k+1}\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{y}_k$

ii. Montrer que si B_k est symétrique alors B_{k+1} l'est aussi.

b) BFGS : Broyder-Fletcher-Goldbach-Shano

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_k} - \frac{B_k\boldsymbol{s}_k\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}}B_k}{\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}}B_k\boldsymbol{s}_k}$$

i. Montrer que $B_{k+1}\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{y}_k$.

ii. Montrer que si B_k est symétrique alors B_{k+1} l'est aussi.

iii. Montrer que si B_k est définie positive et si $s_k^{\mathrm{T}}y_k > 0$ alors B_{k+1} est aussi définie positive.

iv. Montrer que

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} - \frac{\boldsymbol{s}_k\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}B_k^{-1} + B_k^{-1}\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_k} + \left(1 + \frac{\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}B_k^{-1}\boldsymbol{y}_k}{\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_k}\right)\frac{\boldsymbol{s}_k\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_k}.$$

Exercice 3 a) Implémenter la méthode de Newton :

```
function [x,xk]=Newton(f,fp,fpp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit)
% NEWTON Minimization with Newton descent search and Armijo line search
%   [x,xk]= Newton (f,fp,fpp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit) finds an
%   approximate minimum of the function f with gradient fp and Hessian
%   fpp, starting at the initial guess x0. The remaining parameters
%   are optional and default values are used if they are omitted.
%    xk contains all the iterates of the method.
```

Indication : Il suffit de reprendre le code SteepestDescent et de remplacer la direction $-\nabla f$ par $H(f)^{-1}\nabla f$

b) Implémenter la méthode de Quasi-Newton rang 1 symétrique :

```
function [x,xk]=Rank1(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit)
% RANK1 Minimization with Quasi Newton Symmetric Rank 1 and Armijo
%   [x,xk]= Rank1 (f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit) finds an
%    approximate minimum of the function f with gradient fp
%   starting at the initial guess x0. The remaining parameters
%   are optional and default values are used if they are omitted.
%    xk contains all the iterates of the method.
```

c) Implémenter la méthode de Quasi-Newton BFGS :

```
function [x,xk]=BFGS(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit)
% BFGS Minimization with Quasi Newton BFGS and Armijo
%   [x,xk]= BFGS(f,fp,x0,tol,maxiter,tau,be,alinit) finds an
%    approximate minimum of the function f with gradient fp
%   starting at the initial guess x0. The remaining parameters
%   are optional and default values are used if they are omitted.
%    xk contains all the iterates of the method.
```

Indication : Pour les méthodes de quasi Newton, on initialisera la matrice B_0 à l'identité.

Dans les exercices d'implémentation

- Afin de préserver l'uniformité des interfaces et permettre le remplacement transparent d'une implémentation par une autre, l'en-tête fourni doit impérativement être respecté et reproduit dans le code. Vous pouvez copier-coller depuis le PDF disponible sur la page web.
- Les programmes et les résultats doivent être rendus imprimés.

Evaluation du cours d'optimisation

- Les exercices : Les séries d'exercices rendues en retard seront comptées comme non rendues (*i.e.*, note 1 sur 6) dans le calcul de la note finale.
- Un examen oral durant la session d'examens sur le cours.

La note finale est de : $\frac{1}{5}$(exercices.) + $\frac{4}{5}$(note examen oral).

Assistant : Kévin Santugini
Email : `Kevin.Santugini@math.unige.ch`
Page web : `http://www.unige.ch/~santugin/index.php?page=enseignement`