Première rencontre de l'ANR
Contraintes de Courbure et Espaces de Métriques

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
2, 3 et 4 mai 2018
salle 431

- Mercredi 2 mai

  14h-15h. **Sylvain Maillot**
  Preuve de la conjecture de Smale généralisée, d'après Bamler-Kleiner, I.

  15h30-16h30. **Gérard Besson**
  Preuve de la conjecture de Smale généralisée, d'après Bamler-Kleiner, II.

- Jeudi 3 mai

  9h30-10h30. **Laurent Bessière**
  Preuve de la conjecture de Smale généralisée, d'après Bamler-Kleiner, III.

  11h-12h. **Gautier Dietrich**
  Applications CR-harmoniques, énergie renormalisée.

  Pause repas

  14h-15h. **Philippe Castillon**
  Prescription de la courbure des corps convexes de l'espace hyperbolique, I.

  15h30-16h30. **Jérôme Bertrand**
  Prescription de la courbure des corps convexes de l'espace hyperbolique, II.

- Vendredi 4 mai

  9h30-10h30. **Ilaria Mondello**
  Bornes de courbure de Ricci synthétiques : nouveaux exemples géométriques.

  11h15-12h15. Séminaire Darboux : **Samuel Tapie**
  Compacité dans une classe conforme et pincement intégral de la courbure.

Résumés

Jérôme Bertrand, Philippe Castillon

Prescription de la courbure des corps convexes de l'espace hyperbolique.

La courbure de Gauss d'un convexe peut être vue comme une mesure (avec certaines propriétés) sur la sphère unité, le problème d'Alexandrov consistant, à partir d'une telle mesure, à reconstruire le convexe. Pour les convexes euclidiens, ce problème d'Alexandrov est équivalent à un problème de transport optimal sur la sphère.

Pour les convexes de l'espace hyperbolique, ce problème de prescription de la courbure de Gauss est tout aussi naturel. Nous verrons comment la mesure de courbure d'un convexe hyperbolique est décrite par une propriété de transport, et comment cette approche amène à considérer un problème de Kantorovich non linéaire sur la sphère.

Gautier Dietrich

Applications CR-harmoniques, énergie renormalisée.

Certaines variétés riemanniennes, telles le disque de Poincaré, peuvent être munies d'un "bord à l'infini". Elles sont alors dites asymptotiquement hyperboliques, et à leur structure riemannienne correspond sur le bord une structure conforme. Initié par C. Fefferman et C. R. Graham, ce lien entre géométrie conforme et géométrie asymptotiquement hyperbolique est riche de conséquences, et est connu en physique des particules sous le nom de correspondance AdS/CFT. Dans sa thèse, V. Bérard montre grâce à cette correspondance l'existence, étant données deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) avec M de dimension n paire, d'une fonctionnelle agissant sur les applications $C^\infty(M, N)$, invariante conforme par rapport à g, égale à l'énergie de Dirichlet lorsque $n = 2$, appelée énergie renormalisée. Les applications conforme-harmoniques sont les points critiques de cette fonctionnelle, et forment une généralisation des applications harmoniques. Après une présentation succincte de ces objets, j'orienterai mon exposé vers le cas des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes. Ce contexte, dans lequel l'infini conforme est une variété de Cauchy-Riemann, présente de nombreuses analogies avec le cas "n pair" riemannien. J'expliquerai comment y obtenir une notion d'énergie renormalisée et une condition d'harmonicité conforme.

Ilaria Mondello

Bornes de courbure de Ricci synthétiques : nouveaux exemples géométriques.

Des variétés singulières apparaissent naturellement en géométrie quand on considère des quotients de variétés lisses, leurs limites de Gromov-Hausdorff ou des flots géométriques. Un question importante dans l'étude de ces variétés singulières consiste à définir des notions de courbure, et de bornes de courbure, pertinentes. Les travaux de Lott-Sturm-Villani et Ambrosio-Gigli-Savaré ont montré qu'on peut définir une condition de courbure-dimension sur des espaces métriques mesurés, qui correspond à une borne inférieure sur le tenseur de Ricci dans le cas des variétés lisses. Si certaines constructions sur les variétés (quotients, cônes, suspensions sphériques...) donnent des exemples d'espaces qui satisfont cette condition de courbure-dimension, il n'existe pas de critère pour établir si une variété avec des singularités très simples possède une borne synthétique sur la courbure de Ricci. Dans cet exposé nous présentons un critère géométrique pour établir si un espace stratifié satisfait la condition de courbure-dimension : cela donne une ample classe de nouveaux exemples, qui inclut entre autres les variétés à singularités coniques. Cet exposé se base sur un travail en commun avec C. Ketterer, J. Bertrand et T. Richard.

Samuel Tapie

Compacité dans une classe conforme et pincement intégral de la courbure.

Sur une variété M compacte, considérons une suite de métriques sur M qui vérifie une condition de courbure donnée, par exemple Ricci positif, courbure sectionnelle bornée... Peut-on extraire une sous-suite de métriques qui converge ? Si oui, que peut-on dire de l'espace limite ? Il s'agit d'un problème fréquent dès que l'on cherche à trouver une "bonne métrique" sur M. Par exemple pour montrer l'existence d'une métrique d'Einstein, ou dans la démonstration du Théorème de Géométrisation par Perelman...

Nous considérerons une suite de métriques dans une classe conforme fixée. Si l'on suppose que le tenseur de courbure est borné en norme L^p pour $p > n/2$, M. Gursky a montré que l'on peut extraire une sous-suite qui converge en topologie C^α vers une métrique riemannienne limite. Nous présenterons le cas critique d'une suite de métriques (dans une classe conforme) dont la courbure scalaire est pincée en norme $L^{n/2}$. Des singularités peuvent apparaître, la convergence d'une sous-suite vers une variété riemannienne limite ne peut être assuré.

Nous montrons que malgré cela, on peut extraire une sous-suite qui converge au sens de Gromov-Hausdorff, en temps que suite d'espaces métriques mesurés, et que l'espace limite vérifie beaucoup de bonnes propriétés (mesure doublante, inégalité isopérimétrique, inégalité de Sobolev...). Notre montrerons en fait que la mesure de volume reste, tout au long de la suite de métriques, un *poids fortement* A_∞, notion qui vient de l'analyse harmonique et qui a de nombreuses conséquences géométriques.