

# Courbure de Ricci : flot et rigidité différentielle

Laurent Bessières

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenu le 10 décembre 2010 à l'Institut Fourier devant un jury composé de

- Gérard Besson (Institut Fourier)
- Michel Boileau (Université de Toulouse)
- Gilles Carron (Université de Nantes)
- Zindine Djadli (Institut Fourier)
- Sylvain Maillot (Université de Montpellier)
- Carlo Mantegazza (Scuola Normale Superiore Pisa)

au vu des rapports de Bernd Ammann (Universität Regensburg), Gilles Carron et Tobias Colding (Courant Institute)



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont vers Michel Boileau, qui par un cours stimulant de géométrie différentielle, le choix judicieux d'un papier de BCG en mémoire de DEA, et son soutien pendant et après la thèse, a eu une influence décisive. Plus que tout, je le remercie pour l'ouverture offerte vers la recherche et son monde, activité qui représentait une aspiration et en même temps milieu qui m'étais étranger.

Je remercie chaleureusement Gérard Besson et Sylvain (Sylvestre) Gallot, ensemble, pour leur accueil à l'Institut Fourier et leur animation du séminaire TSG, séminaire à l'ambiance si particulière, à la fois détendue et stimulante, agrémentée de si nombreux moments de franche rigolade.

Je remercie Gérard pour la confiance qui a permis tout le travail ensemble ces 6 (7?) dernières années, de l'exégèse des papiers de Perelman à l'écriture du Livre, en passant par les cours faits un peu partout (et aussi les séances nat un peu partout). Je le remercie pour ses conseils, son écoute et son attention constante, en toute occasion.

Je remercie Sylvain (Sylvestre) pour tout le travail ensemble, enseignement et recherche (ses notes de cours et corrigés d'exercice vont rester un modèle), et pour avoir lu et annoté copieusement une version préliminaire de ce manuscrit. C'est un privilège d'avoir pu bénéficier du regard neuf d'un expert géomètre qui n'a pas été plongé dans le flot ces dernières années.

Je suis très honoré que Bernd Ammann, Gilles Carron et Tobias Colding aient accepté de rapporter cette habilitation, dans un délai assez court, et je remercie particulièrement Gilles d'être présent à la soutenance, malgré ses nombreuses sollicitations.

C'est avec plaisir que je remercie Zindine Djadli, Carlo Mantegazza et Sylvain Maillot de faire partie de ce jury. J'en profite pour remercier Zindine et Carlo pour l'organisation de ces belles conférences à Pise et en Calabre, et Sylvain pour avoir été l'interface efficient entre les géomètres et les topologues de [BBB<sup>+</sup>10b].

Je remercie sincèrement Michel Brion de m'avoir incité à préparer cette habilitation, et pour son aide tout au long de la préparation.

Merci à Luc Rozoy pour sa patience, pendant mes longues périodes d'immersion dans le flot.

Enfin, je remercie tous les membres de l'Institut Fourier, qui ont fait de ce laboratoire un lieu agréable et stimulant, et en particulier les participants du séminaire TSG et de ses groupes de travail satellites, et mes ex-colocataires du bureau 129, Vincent et Anne.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Flot de Ricci</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Géométrisation et flot de Ricci</b>	<b>6</b>
1.1	La conjecture de géométrisation . . . . .	6
1.2	Le flot de Ricci . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Le flot de Ricci à bulles et la géométrisation</b>	<b>12</b>
2.1	Flot de Ricci à bulles . . . . .	13
2.1.1	La construction du flot de Ricci à bulles . . . . .	13
2.1.2	Le cas $\pi_1(M)$ fini : Elliptisation . . . . .	18
2.1.3	Cas $\pi_1(M)$ infini : Hyperbolisation . . . . .	20
2.2	Effondrement faible . . . . .	22
2.2.1	Effondrement et effondrement faible . . . . .	22
2.2.2	Volume simplicial et arguments de recouvrement . . . . .	23
2.2.3	Un autre théorème d'effondrement faible . . . . .	26
<b>3</b>	<b>3-variétés de courbure scalaire positive</b>	<b>26</b>
3.1	Introduction . . . . .	26
3.2	Solutions chirurgicales du flot de Ricci . . . . .	28
<b>II</b>	<b>Rigidité différentielle</b>	<b>29</b>
4.3	Phénomènes de rigidité . . . . .	29
4.4	Applications naturelles . . . . .	32
4.5	Limites d'espaces à courbure de Ricci minorée . . . . .	33
<b>III</b>	<b>Questions sur les points critiques de la fonctionnelle de Hilbert-Einstein</b>	<b>37</b>
5.6	Questions . . . . .	37
5.7	Une tentative . . . . .	40
<b>IV</b>	<b>Projets</b>	<b>43</b>

# Avant-propos

Ce mémoire est une synthèse de mes travaux de recherche, réalisée afin d'obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches. Les plupart des textes cités sont disponibles sur ma page :

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/lbessier/recherche.html>

Mon domaine de recherche est la géométrie riemannienne. Mes différents travaux tournent autour d'une question, celle posée par René Thom à Marcel Berger dans les années 60, et qui remonte à Heinz Hopf :

*Quelle est la meilleure métrique riemannienne sur une variété compacte donnée ?*

Cette question a un intérêt propre, car il est naturel de chercher quelles sont les géométries canoniques pour une topologie donnée. Elle a aussi un intérêt pratique : munir une variété d'une métrique privilégiée peut aider à résoudre des questions topologiques, en rendant possible l'utilisation d'outils géométriques ou analytiques. Ce principe est illustré de manière exemplaire par la récente preuve de la conjecture de Poincaré. Cette conjecture affirmait qu'une 3-variété compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère standard. Elle s'est révélée être une des questions les plus difficiles de topologie du 20ème siècle. Par contre c'est un exercice de géométrie riemannienne de montrer que, munie d'une métrique de courbure constante, une telle variété est *isométrique* à la sphère standard. Pour un géomètre ou un analyste, il est donc naturel, pour attaquer cette conjecture, d'essayer de munir la variété de la meilleure métrique possible, celle de courbure constante. C'est ce programme qu'a lancé Richard Hamilton dans les années 80, avec sa théorie du flot de Ricci. Il a été conclu de manière retentissante récemment par Grisha Perelman, en construisant un flot de Ricci avec chirurgie. Cette méthode prouve du même coup la conjecture de géométrisation. La preuve de la conjecture de Poincaré s'avère plus tortueuse que le schéma envisagé ci-dessus, car on n'obtient pas directement de métrique de courbure constante, ni même de courbure positive, sur la variété. Cependant, c'est bien en munissant la variété d'une métrique particulière<sup>1</sup> qu'on en reconnaît la topologie.

Dans la partie I de ce mémoire, j'expose la construction d'une variante du flot de Ricci avec chirurgie, que nous appelons flot de Ricci à bulles, ainsi qu'une preuve alternative de la géométrisation, qui sont développées dans le livre [BBB<sup>+</sup>10b].

Aux questions de meilleure métrique sont naturellement liés des questions de rigidité. On peut illustrer ceci par le théorème de Mostow [Mos73] : si deux variétés compactes de dimension supérieure ou égale à 3, de groupes fondamentaux isomorphes, sont munies de métriques hyperboliques, alors ces variétés sont isométriques. Dans la deuxième partie de ce mémoire, je m'intéresse aux propriétés de rigidité différentielle attachées à un invariant, l'infimum des volumes parmi les métriques à courbure de Ricci minorée.

La troisième partie est consacrée au point de vue variationnel : l'idée générale pour définir une métrique canonique sur une variété donnée est ici de considérer une fonctionnelle sur l'espace des métriques de la variété, et détudier ses extremas ou ses points critiques. En particulier, je

---

<sup>1</sup>La métrique est telle que la variété est recouverte par des *voisinages canoniques*, qui sont des cylindres sphériques ou des boules (cf 2.1.1)

m'intéresse aux points critiques de la fonctionnelle de Hilbert-Einstein restreinte à l'espace des métriques de courbure scalaire constante et de volume 1.

J'expose quelques projets dans la partie IV.

## Première partie

# Flot de Ricci

Cette première partie est consacrée à mes travaux sur le flot de Ricci. L'étude de cette théorie a commencé pour moi par l'exégèse des "papiers de Perelman" [Per02] [Per03b] [Per03a], une entrée un peu rude dans le domaine mais très enrichissante : les quelques 70 pages qui les composent utilisent pas mal d'analyse (inégalité de Harnack, principe du maximum...) et pratiquement toute la géométrie des 40 dernières années (théorèmes de comparaison, convergence géométrique, structure des variétés à courbure positive, espaces d'Alexandrov...). Les démonstrations, aussi bien que les résultats, sont spectaculaires : G. Perelman construit un *flot de Ricci avec chirurgie* sur les 3-variétés compactes et en déduit une preuve des conjectures de Poincaré et de géométrisation, concluant un programme lancé par Richard Hamilton au début des années 1980. De nombreux travaux sur les papiers de Perelman ont depuis montré l'exactitude de sa preuve<sup>2</sup> et fournis des arguments alternatifs à certaines parties de ses travaux [KL08a][SY00] [CZ06a] [MT07][CM07][MT08][BBB<sup>+</sup>07][BBB<sup>+</sup>10a][BBB<sup>+</sup>10b].

Dans le livre [BBB<sup>+</sup>10b] écrit en collaboration avec Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti, nous développons une variante du flot de Ricci avec chirurgie, que nous appelons flot de Ricci à bulles, simplifiant la construction de Perelman. On donne également une preuve alternative de la géométrisation, qu'on déduit de l'existence de suites de métriques produites par le flot de Ricci à bulles, grâce à des arguments topologiques et au théorème de W. Thurston d'hyperbolisation des variétés de Haken (cf. le preprint [BBB<sup>+</sup>07] et la version publiée [BBB<sup>+</sup>10a]). Dans [BBM09], Gérard Besson, Sylvain Maillot et moi-même étendons la construction du flot de Ricci à bulles aux 3-variétés complètes de géométrie bornée. Nous en déduisons la classification de celles, parmi ces variétés, qui admettent une métrique de courbure scalaire uniformément positive.

Cette partie I est organisée comme suit. Elle comporte 3 sections. Dans la première, j'introduis les notions fondamentales de topologie, permettant d'énoncer la conjecture de géométrisation et quelques résultats essentiels. Je décris ensuite le programme et les techniques élaborées par R. Hamilton, et très succinctement la construction par G. Perelman d'un flot de Ricci avec chirurgie. Dans la deuxième, je présente plus en détail le flot de Ricci à bulles, et les idées de Perelman qui en sont le coeur, et notre preuve alternative de la géométrisation. La section 3 est consacrée à l'extension de la construction du flot de Ricci à bulles au cadre des 3-variétés complètes de géométrie bornée et au théorème de classification que nous en déduisons.

---

<sup>2</sup>Pour une présentation des travaux de Perelman aux non experts, on pourra consulter parmi [And04] [Mor05][Bes05][BBB06b] [BBB06a] [Bes06a] [Bes06b][Bes06c][Lot07] [Mai08a]

# 1 Géométrisation et flot de Ricci

Dans cette section, je rappelle les définitions de topologie de dimension 3 qui nous seront nécessaires, les énoncés des conjectures de Poincaré et de géométrisation, ainsi certains résultats essentiels. Je décris ensuite le programme lancé par Hamilton et brièvement sa conclusion par Perelman.

## 1.1 La conjecture de géométrisation

Dans cette sous-section, la variété  $M$  sera supposée compacte (éventuellement à bord), orientable, de dimension 3.

Avant d'énoncer la conjecture de géométrisation, nous introduisons quelques notions essentielles. Une *géométrie* est une variété riemannienne  $(X, g)$  simplement connexe, complète et homogène - i.e. deux points quelconques admettent des voisinages isométriques - admettant des quotients de volume fini. Une variété sans bord est *géométrique* si elle est difféomorphe à un quotient d'une géométrie  $(X, g)$  par un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(X, g)$  agissant librement. Une variété à bord sera elle dite géométrique si son intérieur est géométrique (le bord est dans ce cas rejeté à l'infini, la métrique étant complète). En dimension 2, une géométrie est de courbure constante, il y en a donc essentiellement trois correspondant à une courbure  $-1$ ,  $0$  ou  $+1$ . De plus, toute surface est géométrique. Ce n'est pas le cas en dimension 3, sous deux aspects. D'abord William Thurston a montré qu'il y a 8 géométries, pas toutes de courbure (sectionnelle) constante : celles de courbure constante  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{E}^3$ , et  $\mathbb{H}^3$  ; les géométries produit  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  et  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$  ; les produits tordus  $Nil$  (un fibré en droites sur  $\mathbb{E}^2$ ) et  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  (un fibré en droites sur  $\mathbb{H}^2$ ), et la géométrie  $Sol$  (un fibré en plans sur  $\mathbb{R}$ ). Ensuite, une 3-variété quelconque n'est pas nécessairement géométrique. Cependant, Thurston a conjecturé qu'on pouvait toujours la découper en morceaux qui le soient, et l'a montré pour une large classe de variétés. Le découpage doit se faire le long de certaines surfaces plongées dans la variété et *essentielles* : on dit qu'une surface fermée  $\Sigma$  plongée dans  $M$  est *essentielle* si elle est  $\pi_1$ -injective, ne borde pas de 3-boule et ne coborde pas un produit avec une composante connexe de  $\partial M$ . La conjecture de géométrisation peut-être alors énoncée comme suit.

**Conjecture 1.1** (Conjecture de géométrisation de Thurston). *L'intérieur de toute 3-variété compacte, orientable, peut être découpé le long d'une collection finie de 2-sphères et de 2-tores essentiels deux à deux disjoints, donnant en recollant des 3-boules sur les sphères une collection canonique de 3-variétés géométriques.*

Notons que l'opération consistant à couper la variété le long d'une sphère plongée et à recoller deux 3-boules sur les sphères de bord obtenues est l'opération inverse de la somme connexe. La conjecture dit donc que la variété peut-être décomposée en somme(s) connexe(s), puis chaque composante le long de 2-tore(s) (ou non) tels que les composantes obtenues soient géométriques.

Un cas particulier de la conjecture est la *conjecture d'elliptisation*, qui dit qu'une variété fermée, orientable, de groupe fondamental fini est *sphérique*, c'est-à-dire admet une métrique de courbure constante égale à  $+1$ . Si on suppose que le groupe fondamental est trivial, cette conjecture devient la conjecture de Poincaré :

**Conjecture 1.2** (Conjecture de Poincaré). *Si  $M$  est une 3-variété fermée et simplement connexe, alors  $M$  est difféomorphe à la 3-sphère.*

La conjecture de géométrisation est fondée sur deux résultats centraux de topologie de dimension 3, donnant une décomposition *topologique* canonique : la décomposition de Kneser le long de sphères et la décomposition de Jaco-Shalen-Johansson le long de tores.

On dit que  $M$  est *irréductible* si toute 2-sphère plongée dans  $M$  borde une 3-boule plongée dans  $M$ . Par exemple,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  n'est pas irréductible. On a le résultat suivant, l'existence étant due à H. Kneser et l'unicité à J. Milnor :

**Théorème 1.3** (Décomposition de Kneser). *Toute 3-variété compacte, orientable est une somme connexe de 3-variétés qui sont soit homéomorphes à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  soit irréductibles. De plus la suite finie des composantes de la somme connexe est unique, à réordonnement et homéomorphisme préservant l'orientation près.*

Notons que  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  est géométrique. Ceci réduit la conjecture de géométrisation au cas des variétés irréductibles. Pour la seconde décomposition, nous avons besoin de quelques définitions.

On suppose maintenant que  $M$  est irréductible. Un 2-tore plongé dans  $M$  est dit *incompressible* s'il est  $\pi_1$ -injectif, sinon il est dit *compressible*. On dit alors que  $M$  est *atoroïdale* si tout tore plongé dans  $M$  est compressible ou isotope à une composante connexe de  $\partial M$ . Comme exemple de variété non atoroïdale, on peut penser à  $T^2 \times S^1$ , ou à  $F \times S^1$  pour n'importe quelle surface fermée orientable  $F$  de genre au moins 1. Dans ce dernier cas, on peut prendre comme tore incompressible  $\gamma \times S^1$ , où  $\gamma \subset F$  est une courbe fermée homotopiquement non triviale. On peut faire cette construction sur la plupart des *variétés de Seifert*, une variété de Seifert étant un fibré en cercle sur un orbifold de dimension 2 (de manière équivalente, une variété admettant une partition en cercles telle que chaque cercle admet un voisinage tubulaire saturé). Le théorème de décomposition est alors le suivant [JS79],[Joh79] :

**Théorème 1.4** (Décomposition de Jaco-Shalen-Johansson). *Toute 3-variété compacte, orientable, irréductible admet une décomposition canonique le long de tores incompressibles en variétés qui sont atoroïdales ou de Seifert.*

Il est connu que les variétés de Seifert sont géométriques. Plus précisément, une variété est de Seifert si et seulement si elle admet une des 6 géométries suivantes :  $\mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, Nil, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1, SL(2, \mathbb{R})$  (voir, par exemple, [BMP03] pages 15-16).

Après ces deux décompositions, la conjecture de géométrisation est donc réduite au cas des variétés irréductibles et atoroïdales.

Par ailleurs, une autre classe de variétés pour laquelle la géométrisation était établie est celle des *variétés de Haken*. Une 3-variété compacte, orientable irréductible  $M$  est de Haken si  $\partial M$  est non vide ou si  $M$  contient une surface fermée essentielle. Un résultat majeur de W. Thurston est le suivant :

**Théorème 1.5** (Théorème d'hyperbolisation de Thurston). *La conjecture de géométrisation est vraie pour les 3-variétés de Haken.*

Il restait donc à traiter le cas des variétés fermées, irréductibles et atoroïdales. Le point final découle des travaux de G. Perelman :

**Théorème 1.6** (G. Perelman). *Soit  $M$  une 3-variété fermée, orientable, irréductible, atoroïdale :*

- i. Si  $\pi_1(M)$  est fini, alors  $M$  est sphérique.*



ii. Si  $\pi_1(M)$  est infini, alors  $M$  est hyperbolique ou de Seifert.

On décrit le programme de R. Hamilton et plus brièvement la construction de Perelman dans la sous-section suivante. Nous donnerons plus de détails lorsque nous présenterons notre variante de la preuve. En fait, la démonstration de Perelman prouve la géométrisation dans un cadre plus général que celui de l'énoncé ci-dessus, i.e. sans faire d'hypothèse d'irréductibilité et d'atoroïdalité. Cependant, dans ce texte nous nous concentrons sur le théorème 1.6, qui est celui que nous démontrons dans [BBB<sup>+</sup>10b].

## 1.2 Le flot de Ricci

On suppose maintenant que  $M$  est une variété fermée, orientable de dimension  $n$ . La méthode d'Hamilton consiste, partant d'une métrique initiale  $g$  quelconque sur la variété, à lui associer une famille  $t \mapsto g(t)$  de métriques qui est solution de l'équation, dite maintenant de Hamilton-Ricci :

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}, \quad (1.1)$$

de donnée initiale  $g(0) = g$ . Dans cette équation,  $\operatorname{Ric}_{g(t)}$  est la courbure de Ricci de la métrique  $g(t)$ , un 2-tenseur symétrique qu'on peut définir par la formule

$$\operatorname{Ric}_g(X, X)_x = \sum K(X, e_i)_x,$$

où  $\{e_i\}$  est une base  $g$ -orthonormée du  $(n-1)$ -plan de  $T_x M$  orthogonal à  $X$ , et  $K(X, e_i)_x$  la courbure sectionnelle du 2-plan engendré par  $X$  et  $e_i$ . C'est aussi, à une constante multiplicative près, la moyenne des courbures sectionnelles des 2-plans de  $T_x M$  contenant  $X$ . L'idée est que (1.1) ressemble à une équation de la chaleur sur l'espace des métriques, et que cela doit donc avoir des propriétés régularisantes.

Hamilton démontre d'abord l'existence, pour toute donnée initiale, d'une solution sur  $[0, \varepsilon]$  pour  $\varepsilon > 0$ . En utilisant des équations d'évolution des courbures et des principes du maximum, il montre de plus que la solution existe sur un intervalle maximal  $[0, T)$ , où  $T \in (0, +\infty]$ , tel que, si  $T < +\infty$ , alors le supremum (en valeur absolue) des courbures sectionnelles des métriques  $g(t)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow T$ .

De manière générale, le contrôle des courbures se fait via leurs équations d'évolution et des principes du maximum. Commençons par expliquer ceci dans le cas le plus simple : celui de la courbure scalaire, notée  $R$ . L'équation d'évolution est alors

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2 \geq \Delta R + \frac{2}{n} R^2 \quad (1.2)$$

où toutes les quantités (Laplacien, normes, courbures) dépendent de  $g(t)$ , et  $\Delta$  est le Laplacien des analystes, i.e. la trace du Hessien. C'est une E.D.P de type réaction-diffusion, le Laplacien régularisant la solution (diffusion) et le terme non linéaire ayant tendance à la faire exploser (réaction). Heuristiquement,  $\frac{\partial R}{\partial t} \geq \frac{2}{n} R^2 \geq 0$  en un point où la courbure scalaire est minimale, donc le minimum de la courbure scalaire de  $g(t)$ , qu'on note  $R_{\min}(t)$ , doit croître avec  $t$ . Plus précisément, un principe du maximum (cf. [CK04, Th. 4.2]) montre que si  $u(\cdot, \cdot)$  est une solution d'une E.D.P du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + F(u),$$

et que  $\phi(t)$  est une solution de l'O.D.E  $\phi'(t) = F(\phi)$  de condition initiale satisfaisant  $u(\cdot, 0) \geq \phi(0)$ , alors  $u(\cdot, t) \geq \phi(t)$  pour tout  $t$  tel que  $u$  et  $\phi$  soient définis. Appliqué à (1.2), avec  $F = 0$  ou  $F(u) = \frac{2}{n}u^2$ , ceci montre que  $R_{\min}(t)$  est croissante, ou que

$$R_{\min}(t) \geq \frac{n/2}{\frac{n}{2R_{\min}(0)} - t}. \quad (1.3)$$

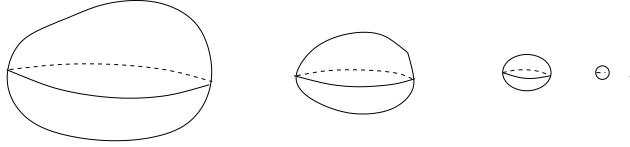
Notons que si  $R_{\min}(0) > 0$ , l'équation (1.3) montre que  $R_{\min}(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t$  tend vers une valeur  $T \leq \frac{n}{2R_{\min}(0)}$ . Cependant, il se peut que des courbures sectionnelles tendent vers  $+\infty$ , d'autres vers  $-\infty$ . Nous verrons plus loin qu'en un certain sens, les courbures sectionnelles positives tendent à l'emporter. Pour avoir plus d'informations Hamilton travaille avec l'équation d'évolution de l'opérateur de courbure (un 2-tenseur symétrique sur l'espace des 2-formes de la variété), qui en dimension 3 s'écrit très agréablement sous la forme

$$\frac{\partial \text{Rm}}{\partial t} = \Delta \text{Rm} + Q(\text{Rm}), \quad (1.4)$$

où le Laplacien est la trace de la dérivée covariante seconde et  $Q$  est une expression quadratique. Un principe du maximum adéquat montre alors que la condition  $\text{Ric} \geq 0$  est préservée par le flot de Ricci (en dimension 3). Sous l'hypothèse  $\text{Ric} > 0$ , il obtient le résultat frappant suivant :

**Théorème 1.7** ([Ham82]). *Soit  $(M, g_0)$  compacte de dimension 3 telle que  $\text{Ric}_{g_0} > 0$ , et soit  $g(t)$  la solution de (1.1) telle que  $g(0) = g_0$ . Alors  $T < \infty$  et  $g(t)$  converge, à renormalisation près, lorsque  $t \rightarrow T$  vers une métrique de courbure sectionnelle constante.*

En particulier  $M$  est sphérique.



La renormalisation consiste à considérer la solution du *flot de Ricci normalisé* :

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \text{Ric}_{g(t)} + \frac{2}{n} r g, \quad (1.5)$$

où  $r = \frac{\int_M R dv_g}{\text{vol}(g)}$ . Cette solution diffère de (1.1) seulement par une renormalisation de la métrique et du temps, telle que le volume soit constant. Un autre résultat de "convergence" est obtenue dans [Ham99], où Hamilton classe les solutions du flot de Ricci normalisé qu'il appelle *non singulières*, c'est-à-dire les solutions de (1.5) définies sur  $[0, +\infty)$  qui satisfont  $|\text{Rm}| \leq C$ , où  $C$  est indépendant de  $t$ . Il montre que pour une telle solution, sur une variété fermée  $M$  de dimension 3,

- $g(t)$  s'effondre (le maximum des rayons d'injectivité de la variété tend vers 0) lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  
ou
- $g(t)$  converge vers une métrique de courbure sectionnelle constante (les 3 signes étant possibles) lorsque  $t \rightarrow \infty$ , ou
- Il existe une collection finie  $H_1, \dots, H_n$  de variétés hyperboliques complètes (non compactes) de volume fini, et pour tout  $t$  assez grand des plongements  $\varphi_i(t) : H_i \rightarrow M$  tel que  $\varphi_i(t)^* g(t)$  converge vers la métrique hyperbolique lorsque  $t \rightarrow \infty$ ; la *partie exceptionnelle* de  $M$ , qui

est formée des points de  $M$  qui sont en dehors de l'image de tous les  $\varphi_i(t)$  ou qui sont dans l'image mais tels que  $\varphi_i(t)^*g(t)$  n'est pas assez proche de la métrique hyperbolique, a un volume tendant vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ ; chaque  $H_i$  est topologiquement essentiel au sens que  $\pi_1(H_i)$  s'injecte dans  $\pi_1(M)$ .

Sans hypothèse sur la métrique initiale ou sur les courbures de  $g(t)$ , une solution de (1.1) ou (1.5) peut développer des singularités qu'une renormalisation ne permet pas d'éliminer. La courbure peut exploser sur des parties seulement de la variété, ou exploser partout mais à des vitesses différentes.

Dans [Ham95b] R. Hamilton étudie les singularités en combinant le *pincement de Hamilton-Ivey*, des *dilatations paraboliques* et un *théorème de compacité*. Expliquons ces 3 notions, fondamentales pour l'étude du flot de Ricci, et utilisées de manière intensive dans la construction de G. Perelman.

Le pincement de Hamilton-Ivey, découvert par R. Hamilton et T. Ivey, dit essentiellement que, sous l'action d'un flot de Ricci, si la courbure scalaire devient très grande en un point, la partie négative de l'opérateur de courbure tend à être négligeable comparée à la courbure scalaire, en ce point. De plus, il donne en tout point un contrôle de l'opérateur de courbure par la courbure scalaire, du moment que celui-ci soit valide au temps initial. Plus précisément :

**Théorème 1.8** (Pincement de Hamilton-Ivey [Ham86],[Ive93]). *Il existe une fonction croissante  $\phi : [-1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ , telle que  $\phi(s)s^{-1} \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow +\infty$  avec la propriété suivante. Si  $R \geq -1$  et  $\text{Rm} \geq -\phi(R)$  sur  $M \times \{0\}$ , alors on a sur  $M \times [0, T)$ ,*

$$\text{Rm} \geq -\phi(R). \quad (1.6)$$

La contrainte initiale n'est pas restrictive car on peut toujours s'y ramener par dilatation de la métrique. Dans l'énoncé ci-dessus,  $\text{Rm} \geq a \in \mathbb{R}$  signifie que les valeurs propres de l'opérateur de courbure  $\text{Rm}$  sont supérieures ou égales à  $a$ . Si on les désigne par  $\lambda \geq \mu \geq \nu$ , on a donc aussi, puisque  $2(\lambda + \mu + \nu) = R$  (avec les conventions adéquates),

$$\frac{R}{2} + 2\phi(R) \geq \lambda \geq \nu \geq -\phi(R), \quad (1.7)$$

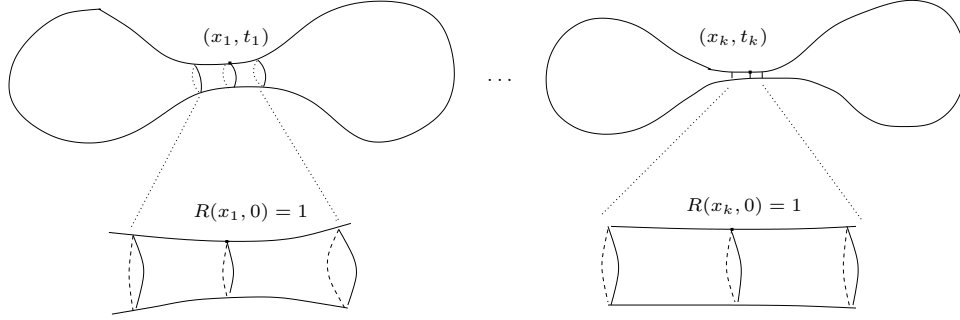
ce qui signifie que la courbure scalaire contrôle tout l'opérateur de courbure. De plus, il se passe quelque chose de très intéressant lorsque  $R(x, t) \gg 1$  (par convention  $R(x, t)$  désigne la courbure scalaire au point  $x$  de la métrique  $g(t)$ ). En effet, en divisant (1.6) par  $R$ , on a alors

$$\frac{\text{Rm}(x, t)}{R(x, t)} \geq \frac{-\phi(R(x, t))}{R(x, t)} \geq -\varepsilon \quad (1.8)$$

où  $\varepsilon > 0$  peut-être arbitrairement petit quand  $R(x, t) \rightarrow \infty$ . Si on considère une renormalisation de  $g(t)$ , appelons la  $\bar{g}(t)$ , telle que  $R_{\bar{g}}(x, t) = 1$ , on a alors  $\text{Rm}_{\bar{g}}(x, t) \geq -\varepsilon$ . La courbure de la métrique renormalisée est presque positive au point considéré. On commence à voir comment la géométrie des variétés à courbure positive intervient dans l'histoire.

Un cas particulier de renormalisation est fourni par les *dilatations paraboliques* : si  $g(\cdot)$  est un flot de Ricci défini sur  $[a, b]$ ,  $Q$  un nombre positif, et  $t_0 \in [a, b]$ , on appelle *dilatation parabolique de facteur  $Q$  au temps  $t_0$*  la famille de métriques  $\bar{g}(t) := Qg(t_0 + t/Q)$ , qui est définie sur  $[Q(t_0 - a), Q(b - t_0)]$ . C'est aussi un flot de Ricci, l'opération ayant pour effet de diviser les courbures par  $Q$  (qui en général est grand) et de ramener le temps  $t_0$  en 0. Si  $Q = R(x_0, t_0)$ , on a ainsi  $R_{\bar{g}}(x_0, 0) = 1$ .

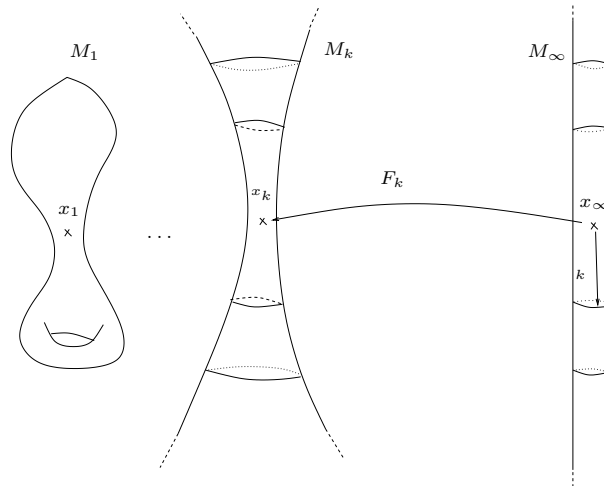
Pour étudier les singularités, l'idée est, étant donnée une suite  $(x_k, t_k)$  où  $R(x_k, t_k) \rightarrow \infty$ , de considérer la suite de dilatations paraboliques de facteur  $Q_k$  au temps  $t_k$ , avec en général  $Q_k = R(x_k, t_k)$ . On obtient ainsi une suite de flots de Ricci pointés  $(M, g_k(\cdot), x_k)$ , définis sur  $[-t_k Q_k, 0]$  (au moins).



On souhaite alors faire (sous)-converger cette suite vers un flot de Ricci  $(M_\infty, g_\infty(\cdot), x_\infty)$ . Si les  $Q_k$  sont bien choisis et si la limite existe, celle-ci sera un flot de Ricci d'opérateur de courbure positif ou nul (en  $x_\infty$  cela se voit par passage à la limite dans la renormalisation de (1.8), aux autres points il faut un petit argument), défini sur  $(-\infty, 0]$  (au moins, on dit alors qu'il est *antique*). L'étape suivante est de classifier ces solutions, ce qui donnera des modèles pour les singularités.

Avant cela précisons la notion de convergence et le théorème de compacité adéquat. Nous avons besoin d'une définition, qui dans sa version riemannienne est due à Gromov.

**Définition 1.9.** Soit  $(a, b)$  un intervalle tel que  $-\infty \leq a < 0 \leq b \leq +\infty$ . On dit qu'une suite de flots de Ricci pointés  $(M_k, \{g_k(t)\}_{t \in (a,b)}, x_k)$  converge vers un flot de Ricci pointé  $(M_\infty, \{g_\infty(t)\}_{t \in (a,b)}, x_\infty)$  s'il existe pour tout  $k$  des plongements  $F_k$  de la boule de rayon  $k$  (pour  $g_\infty(0)$ )  $B(x_\infty, 0, k) \subset M_\infty$  vers  $M_k$  envoyant  $x_\infty$  sur  $x_k$  tels que  $F_k^* g_k(t)$  converge vers  $g_\infty(t)$  au sens  $C^\infty$  uniformément sur tous les compacts de  $M_\infty \times (a, b)$ .



Le théorème de compacité est alors le suivant :

**Théorème 1.10** ([Ham95a]). *Si une suite de flots de Ricci pointés  $(M_k, g_k(\cdot), x_k)$  satisfait*

- (1) Pour tout  $r > 0$  et tout  $t \in (a, b)$ , les valeurs absolues des courbures sectionnelles de  $g_k(t)$  sont bornées sur  $B(x_k, 0, r) \subset M_k$  par une constante  $K(r, t)$  indépendante de  $k$ ,
- (2) Le rayon d'injectivité en  $x_k$  de  $g_k(0)$  est minoré par une constante  $v > 0$  indépendante de  $k$ ,

alors il existe une sous-suite convergeant vers un flot de Ricci pointé  $(M_\infty, g_\infty(\cdot), x_\infty)$  défini sur  $(a, b)$ .

Une difficulté majeure dans le programme d'Hamilton était d'obtenir la condition (2) ci-dessus, pour une suite de dilatations paraboliques, sans hypothèse sur la métrique initiale  $g_0$ . L'étape suivante, après avoir montré que les singularités se produisent essentiellement sur des cylindres  $S^2 \times I$ , aurait été de faire des chirurgies sur leurs sphères médianes, de reboucher par des boules, puis de relancer le flot de Ricci sur chaque composante connexe. Dans l'idéal, après un nombre fini de chirurgies, certaines composantes acquièrent une courbure sectionnelle positive, alors que les autres deviennent non singulières. Les premières sont alors classifiées grâce au théorème 1.7, et on n'a pas besoin de poursuivre le flot sur ces composantes (on dit que le flot *s'éteint*). Les secondes sont classifiées par le théorème [Ham99] vu page 9.

C'est plus ou moins ce programme qui a été terminé par G. Perelman, mais avec quelques complications redoutables. Par exemple, il peut y avoir une infinité de chirurgies, et il n'y a pas de borne globale pour la courbure sectionnelle. Un des apports de [Per02] est l'introduction de nouvelles fonctionnelles, de type entropie, dont la monotonie le long du flot permet cependant de contrôler des quantités géométriques, comme le rayon d'injectivité local. Perelman en déduit la classification des singularités et la description de la métrique en ses points d'explosion, grâce au théorème dit des *voisinages canoniques* (cf. [Per02, Th. 12.1]). Dans [Per03b], Perelman démontre l'existence d'un flot de Ricci avec chirurgie défini sur  $[0, +\infty)$  (avec la convention de considérer l'ensemble vide sur  $[T, +\infty)$  si le flot s'éteint sur toutes les composantes de  $(M, g(T))$ ). Après l'étude en temps long (i.e. lorsque  $t \rightarrow \infty$ ) de ce flot avec chirurgie, Perelman obtient les estimées géométriques (borne locale de courbure par exemple) lui permettant de montrer la convergence du flot (convenablement renormalisé) vers une métrique hyperbolique sur la *partie épaisse*, et détablir la *structure graphée* de la *partie mince*. Nous verrons ces notions en détail en 2.1.3, lorsque nous présenterons notre argument alternatif pour démontrer la géométrisation. Une preuve de la conjecture de Poincaré, utilisant seulement l'existence d'un flot de Ricci avec chirurgie en temps fini, est donnée dans [Per03a]. Dans cette preuve, on n'a pas besoin de l'étude, très technique, du comportement en temps long du flot. Nous en présenterons une version en 2.1.2, et nous verrons qu'on n'a besoin en fait que d'une version rudimentaire de flot de Ricci à bulles pour démontrer la conjecture de Poincaré.

Les articles de Perelman sont très denses et utilisent des techniques très variées d'analyse et de géométrie. On ne les détaille pas ici, réservant quelques explications pour notre variante du flot avec chirurgie présentée dans la section suivante. En effet, si notre construction est un peu plus simple, les outils sont ceux de Perelman.

## 2 Le flot de Ricci à bulles et la géométrisation

Dans cette section, je présente le flot de Ricci à bulles, notre variante de la construction de G. Perelman, que nous développons dans les parties I, II et III du livre [BBB<sup>+</sup>10b]. J'explique ensuite comment on en déduit une preuve alternative de la conjecture de géométrisation, grâce

à un théorème d'effondrement faible. Celui-ci, indépendant de la théorie du flot de Ricci, repose sur un théorème d'annulation du volume simplicial, de M. Gromov, et sur le théorème d'hyperbolisation de Thurston.

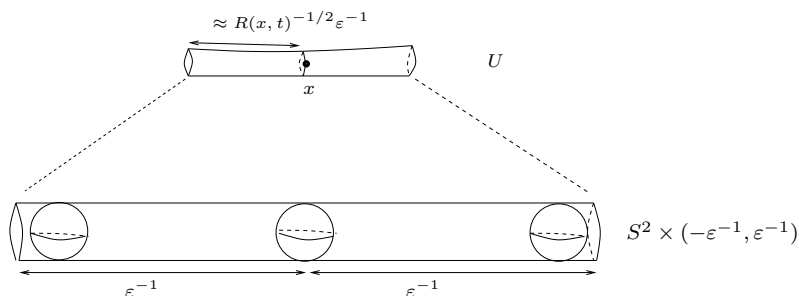
## 2.1 Flot de Ricci à bulles

Dans cette section, nous supposons la variété  $M$  connexe, fermée, orientable, et *irréductible*. Nous la supposons également *non sphérique*. Notre but est de prouver le théorème 1.6. Le cas i) se déduira par contradiction d'un théorème d'existence en temps fini d'un flot de Ricci à bulles et d'une estimée *a priori* sur son temps maximal d'existence. Le cas ii) utilisera l'existence en temps infini d'un flot de Ricci à bulles et le théorème d'effondrement faible mentionné ci-dessus.

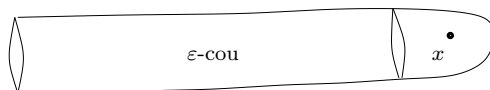
### 2.1.1 La construction du flot de Ricci à bulles

Je commence par une description heuristique de la construction du flot de Ricci à bulles. Supposons donné un flot de Ricci  $g(\cdot)$  sur  $M \times [0, T)$  où  $T < +\infty$  est maximal. Les principes du maximum et le pincement de Hamilton-Ivey montrent que le maximum de la courbure scalaire de  $g(t)$ , que nous noterons  $R_{\max}(t)$ , tend vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow T$ . Le théorème des voisinages canoniques de Perelman montre que le flot de Ricci a la propriété  $(VC)_r$ , c'est à dire qu'il existe un paramètre  $r > 0$  (dépendant des courbures sectionnelles et du rayon d'injectivité de  $g(0)$ ), tel que tout point  $(x, t)$  de courbure scalaire  $R(x, t) \geq r^{-2}$  est centre d'un *voisinage canonique*. Nous en donnons une définition simplifiée. Sous les hypothèses topologiques ci-dessus<sup>3</sup>, un voisinage canonique est un ouvert  $U$  de  $(M, g(t))$  qui est

(a) un  $\varepsilon$ -cou<sup>4</sup> :  $U$  est  $\varepsilon$ -homothétique ( $\varepsilon$ -proche après dilatation) au produit  $S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$ ,



(b) un  $\varepsilon$ -capuchon<sup>5</sup> :  $U$  est une boule topologique dont un voisinage du bord est un  $\varepsilon$ -cou.



<sup>3</sup>Dans le cas général, la liste des voisinages canoniques est plus longue que celle donnée ici. Il faut ajouter par exemple les variétés à courbure positive.

<sup>4</sup>Cette définition peut-être renforcé en *epsilon-cou fort* : on demande alors que  $(U, g(\cdot))$ , sur un intervalle de temps  $[t - \Delta, t]$ , soit  $\varepsilon$ -proche, après dilatation parabolique, de  $S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$  muni de son flot standard sur l'intervalle  $[-1, 0]$

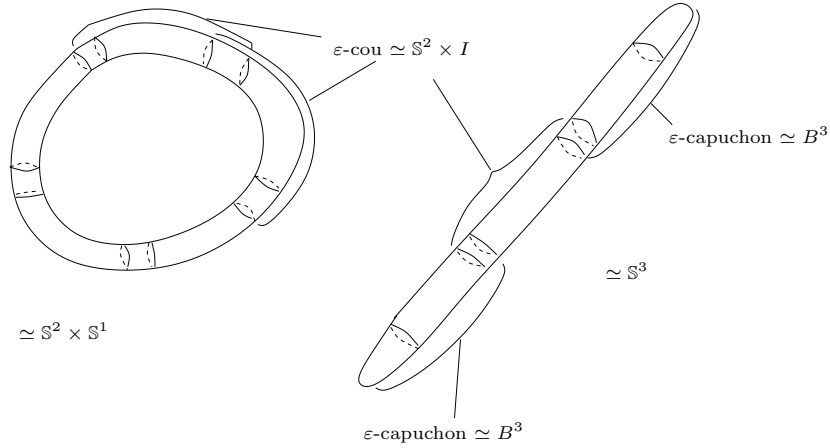
<sup>5</sup>Cette définition peut aussi être renforcée en  $(\varepsilon, C)$ -capuchon pour inclure des contrôles géométriques dépendant de  $\varepsilon$  et d'une constante  $C$ .

On dit que  $x \in U$  est *centre* du voisinage canonique s'il est sur la sphère médiane de  $U$  lorsque  $U$  est un  $\varepsilon$ -cou (sphère qui correspond à  $S^2 \times \{0\}$  via l'approximation), et s'il n'est pas dans le  $\varepsilon$ -cou au bord de  $U$  lorsque  $U$  est un capuchon. Par abus de langage on dira que  $(x, t)$  est centre du voisinage canonique. Le paramètre  $\varepsilon$  est un petit nombre positif qui contrôle à la fois la taille des  $\varepsilon$ -cous et la proximité métrique du voisinage canonique au modèle  $S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$ . Il assure que si des  $\varepsilon$ -cous s'intersectent raisonnablement, leur union est difféomorphe à  $S^2 \times (0, 1)$  (qu'on appelle alors un  $\varepsilon$ -tube) ou à  $S^2 \times S^1$ . De même, une union connexe de  $\varepsilon$ -cous et de  $\varepsilon$ -capuchons sera un  $\varepsilon$ -capuchon (une 3-boule) ou difféomorphe à  $S^3$  (s'il y a 2 capuchons disjoints). La proximité métrique est définie comme suit. On dit que  $(U, g(t))$  est  $\varepsilon$ -homothétique à  $S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$  s'il existe  $\lambda > 0$  et un difféomorphisme  $\psi : S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}) \rightarrow U$  tel que

$$|\lambda \psi^* g(t) - g_{\text{cyl}}|_{C^{[\varepsilon^{-1}]}} < \varepsilon,$$

où  $g_{\text{cyl}}$  est la métrique cylindrique de courbure scalaire 1 sur  $S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1})$ . Il s'ensuit que  $\lambda$  est proche de  $R(x, t)$ , et que la taille du  $\varepsilon$ -cou est déterminée par sa courbure scalaire (son diamètre est de l'ordre de  $2\varepsilon^{-1}R(x, t)^{-1/2}$ ).

Notons que l'hypothèse d'irréductibilité et de non sphéricité de  $M$  implique que la sphère médiane de tout  $\varepsilon$ -cou sépare  $M$  en deux composantes connexes dont une (et une seulement) est une boule. Il est donc impossible qu'en un temps  $t \in [0, T)$ , on ait  $R_{\min}(t) \geq r^{-2}$ . En effet, si c'était le cas, tout point  $(x, t)$  serait centre d'un voisinage canonique et la variété  $M$  serait recouverte par des  $\varepsilon$ -cous et des  $\varepsilon$ -capuchons, donc difféomorphe à  $S^2 \times S^1$  ou  $S^3$ , ce qui est exclu par hypothèse.



L'idée, pour éviter la formation de singularités, est de fixer un nombre  $\Theta \gg r^{-2}$ , et d'effectuer, au premier temps  $t_0 \in [0, T)$  tel que  $R_{\max}(t_0) = \Theta$  (s'il existe), une déformation de la métrique que, par abus de langage et pour souligner la différence avec la démarche de Perelman, nous appellerons *chirurgie métrique*. En effet, contrairement à la construction de Perelman, nous gardons la variété fixe lors des "chirurgies". Une autre différence est que Perelman effectue les chirurgies au temps  $T$  tel que  $R_{\max}(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow T$ . Notre procédure est plus proche de celle de Hamilton [Ham86]. La chirurgie métrique consiste d'une part à trouver une collection finie  $\mathcal{U}$  de  $\varepsilon$ -cous disjoints de courbure scalaire  $\approx h^{-2}$ , où le paramètre<sup>6</sup>  $h > 0$  vérifie

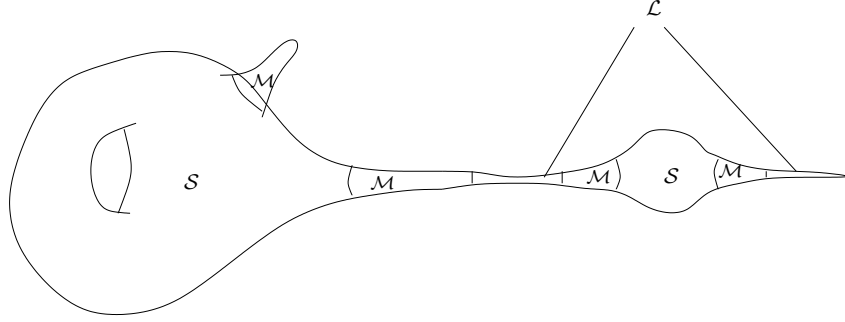
$$r^{-2} \ll h^{-2} \ll \Theta,$$

<sup>6</sup>Ce paramètre est introduit pour la raison technique suivante : il sera en fait nécessaire de prendre des  $\delta$ -cous, où  $\delta \ll \varepsilon$ . L'existence de ces  $\delta$ -cous sera démontrée pour  $\frac{h^{-2}}{r^{-2}}$  assez grand et  $\frac{h^{-2}}{\Theta}$  assez petit

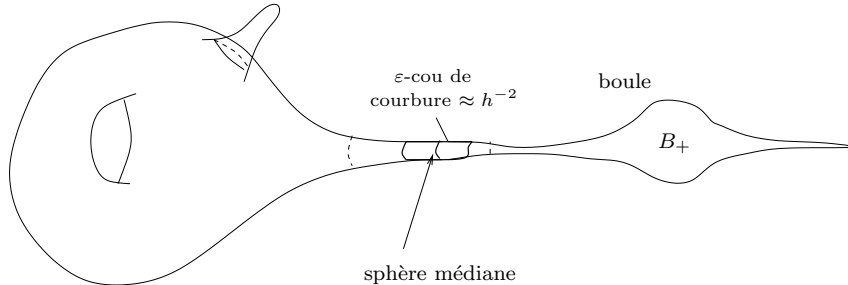
telle que la réunion  $\mathcal{B}_+$ , des 3-boules bordées par les sphères médianes de  $\mathcal{U}$ , contienne la région de grande courbure scalaire. Plus précisément, partitionnons  $(M, g(t_0))$  en 3 régions (pas nécessairement connexes) de petite, moyenne et grande courbure scalaire :

$$\mathcal{S} = \{x \mid R(x, t_0) \leq 2r^{-2}\}, \quad \mathcal{M} = \{x \mid 2r^{-2} < R(x, t_0) \leq \Theta/2\},$$

et  $\mathcal{L} = \{x \mid \Theta/2 < R(x, t_0) \leq \Theta\}.$

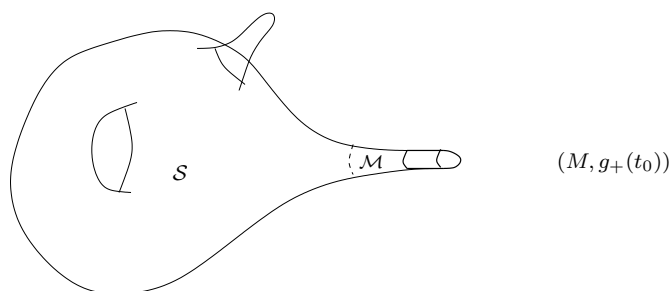


Rappelons que  $\mathcal{S}$  est toujours non vide d'après nos hypothèses topologiques. Faisons une observation préliminaire. Une  $g(t_0)$ -géodésique minimisante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $\gamma(0) \in \mathcal{S}$  et  $\gamma(1) \in \mathcal{L}$  rencontre  $\mathcal{M}$ , et en particulier contient un point  $\gamma(s)$  de courbure scalaire  $h^{-2}$ . Puisque  $h^{-2} \gg 2r^{-2}$ , le point  $\gamma(s)$  est centre d'un voisinage canonique  $U$ . Celui-ci est nécessairement un  $\varepsilon$ -cou :  $\gamma$  est minimisante, a ses extrémités hors de  $U$  et passe par son centre, ce qui est impossible dans le cas d'un  $\varepsilon$ -capuchon. Sa sphère médiane borde alors une 3-boule contenant une des extrémités de  $\gamma$  seulement. Cependant, ce pourrait-être  $\gamma(0)$  (par exemple, dans la figure ci-dessus, si  $\gamma(0) \in \mathcal{S}$  est à droite et  $\gamma(1) \in \mathcal{L}$  est dans la partie centrale). Pour choisir correctement une famille de boules, on s'appuie essentiellement sur l'argument suivant. L'ensemble  $\mathcal{M} \cup \mathcal{L}$  étant recouvert par des voisinages canoniques, on peut l'inclure dans une famille finie de  $\varepsilon$ -tubes et de  $\varepsilon$ -capuchons disjoints,  $V_1, \dots, V_p$ . On considère alors  $N = M \setminus (\cup_i V_i) \subset \mathcal{S}$ , qui est non vide. Une des composantes connexes  $N'$  de  $N$  n'est pas incluse dans une 3-boule : sinon  $M$  est contenu dans une union de tubes et de 3-boules, donc difféomorphe à  $S^2 \times S^1$  ou  $S^3$ , ce qui est exclu. On choisit cette composante  $N'$  (à gauche sur la figure), qu'on sépare alors de  $\mathcal{L}$  grâce à des  $\varepsilon$ -cous contenus dans les 3-boules bordant  $N'$  (qui sont disjointes de  $N'$ ). Précisons qu'il peut être nécessaire d'utiliser plusieurs  $\varepsilon$ -cous dans une boule.



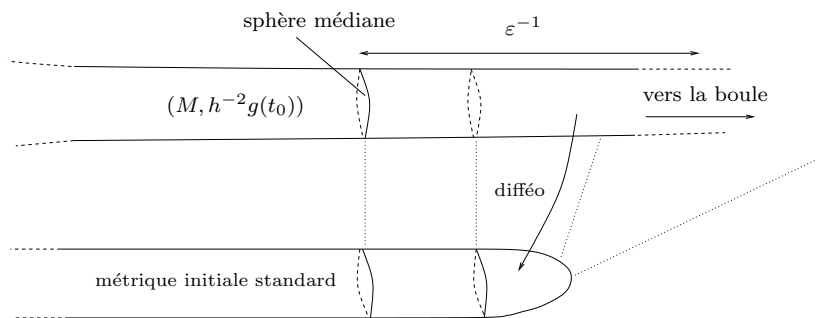
Ayant inclus les points de grande courbure scalaire dans  $\mathcal{B}_+$ , on remplace sur chaque boule de  $\mathcal{B}_+$ , la métrique  $g(t_0)$  par une métrique  $g_+(t_0)$  qui satisfait (a)  $g_+(t_0) < g(t_0)$  (b) la courbure scalaire de  $g_+(t_0)$  est de l'ordre de  $h^{-2}$  (c)  $g_+(t_0)$  vérifie le pincement de Hamilton-Ivey (d)  $g_+(t_0)$  est modelée sur la *métrique initiale standard*.





La métrique initiale standard est la donnée initiale de la *solution standard*, un flot de Ricci sur  $\mathbb{R}^3$ , défini sur l'intervalle  $[0, 1)$  et pour chaque temps complet, rotationnellement symétrique, de courbure sectionnelle positive et bornée, cylindrique à l'infini. La donnée initiale est de plus sphérique près du sommet (le centre de symétrie), et cylindrique de courbure scalaire 1 en dehors d'un compact (elle est en fait obtenue en recollant un hémisphère à  $S^2 \times [0, +\infty)$ ).

Les propriétés (a) et (b) peuvent sembler contradictoires car  $h^{-2} \ll \Theta$ , ce qui signifie que le maximum de la courbure scalaire a décré ainsi que la métrique. On les obtient en utilisant un difféomorphisme qui concentre  $B$  (la métrique étant renormalisée par  $h^{-2}$ ) près du sommet de la métrique initiale standard, en faisant l'interpolation avec cette métrique, puis en ramenant la métrique obtenue sur  $B$  (et en renormalisant par  $h^2$ ).



Sur le complémentaire des boules on pose  $g_+(t_0) = g(t_0)$ . Sur chaque composante connexe de  $\mathcal{U} \cup \mathcal{B}$ , la métrique obtenue définit un  $\varepsilon$ -*capuchon presque standard*, de courbure scalaire comparable à  $h^{-2}$ . Par construction, on obtient  $g_+(t_0) \leq g(t_0)$ ,  $R_{\max}(g_+(t_0)) \leq \Theta/2$  et  $R_{\min}(g_+(t_0)) \geq R_{\min}(t_0)$ .

L'idée ensuite est de relancer le flot de Ricci sur  $M$  avec donnée initiale  $g_+(t_0)$ , et d'itérer la construction ci-dessus. Si c'est possible sur un intervalle donné avec les mêmes paramètres, on obtient sur  $M$  un flot de Ricci lisse par morceaux, de courbure scalaire bornée (par  $\Theta$ ). De plus, le temps nécessaire à la courbure scalaire pour passer de  $\Theta/2$  à  $\Theta$  peut-être estimé grâce aux propriétés des voisinages canoniques. Il est au moins de  $C/\Theta$  où  $C$  est une constante. On a donc une estimée sur le nombre maximal de temps singuliers dans l'intervalle donné.

Ces deux propriétés (courbure bornée, estimées entre temps singuliers) n'apparaissent pas dans la construction de Perelman. En effet, Perelman effectue les chirurgies au temps singulier  $T$  où  $R_{\max} = +\infty$ . Ces propriétés ne sont pas cruciales dans la construction sur les variétés compactes, mais le seront par contre dans la variante développée sur les variétés non compactes (Section 3).

La grande difficulté est évidemment de montrer l'existence du paramètre  $r$  valable sur un intervalle donné *a priori*. La preuve (qui occupe les parties I-II de [BBB<sup>+</sup>10b]) est

trop complexe pour être détaillée dans ce texte. En effet on doit, pour montrer l'existence du flot de Ricci à bulles sur un intervalle  $[0, T]$  donné *a priori*, introduire d'autres paramètres et construire une version plus sophistiquée, dite *de paramètres*  $(r, \delta, \kappa)$ . Sans aller au coeur de la démonstration, nous allons essayer d'expliquer au lecteur le rôle de ces paramètres, et pourquoi leur interpendance rend la construction si délicate.

Le paramètre crucial est le rayon  $r > 0$  des voisinages canoniques, celui de la propriété  $(VC)_r$ . Il s'agit de le définir de manière qu'il soit insensible aux chirurgies. En effet, dans le cas contraire, on aurait après un premier temps singulier  $t_0$  un  $r_1 > 0$ , dépendant de  $g_+(t_0)$ , et une simple itération de la construction précédente risquerait alors de donner des suites  $r_i, h_i \rightarrow 0, \Theta_i \rightarrow \infty$ , et une accumulation des temps singuliers en temps fini.

Le point clé est donc d'avoir une version du théorème des voisinages canoniques, qui montre l'existence de ce rayon  $r$ , insensible aux chirurgies. Expliquons un peu la preuve de ce théorème. Elle montre en fait l'existence d'un paramètre  $r = r(\kappa) > 0$  où  $\kappa > 0$  est un autre paramètre qui contrôle le *non-effondrement local* de  $g(\cdot)$ . En simplifiant quelque peu les définitions, disons que  $g(t)$  est  $\kappa$ -non-effondrée à l'échelle 1 si, pour toute boule  $B(x, \rho) \subset (M, g(t))$  de courbures sectionnelles bornées en valeur absolue par  $\rho^{-2}$ , on a  $\text{vol } B(x, \rho) \geq \kappa \rho^3$ . Par les théorèmes standard de comparaison, cette minoration du volume équivaut à une minoration du rayon d'injectivité en  $x$  par  $C(\kappa)\rho$ , où  $C(\kappa) > 0$ . Le premier résultat majeur de Perelman dans [Per02] est un théorème de non effondrement local, qui montre l'existence d'une constante  $\kappa(T) > 0$  tel que tout flot de Ricci sur  $[0, a) \subset [0, T)$  est  $\kappa$ -non effondré à l'échelle 1 (si  $g(0)$  est convenablement normalisée). Sa preuve utilise de nouvelles fonctionnelles ( $\mathcal{W}$ -entropie,  $\mathcal{L}$ -longueur) et des arguments variationnels le long de  $\mathcal{L}$ -géodésiques (courbe minimisant la  $\mathcal{L}$ -longueur) que nous ne détaillerons pas ici.

Une fois obtenu le  $\kappa(T)$ -non effondrement, la preuve du théorème des voisinages canoniques (sur  $[0, T]$  avec les mêmes hypothèses) s'effectue alors par contradiction, en considérant une suite de contre-exemples et leurs dilatations paraboliques. Le contrôle du rayon d'injectivité local permet d'appliquer un théorème de compacité (local), ce qui est la première étape de la preuve. La suite, très technique, consiste à étendre les contrôles de courbure pour en déduire une convergence au sens du théorème 1.10. La contradiction finale est fournie par la classification des modèles limites (appelés  $\kappa$ -solutions), que Perelman résoud complètement en dimension 3.

Un point-clé pour étendre la preuve ci-dessus à un flot avec chirurgie (ou à bulles) est donc de déterminer  $\kappa(T) > 0$  qui soit insensible aux chirurgies. Pour que les arguments variationnels de la preuve du théorème de non effondrement local mentionné ci-dessus continuent à s'appliquer, on est conduit à raffiner la construction de la chirurgie métrique. Très grossièrement, disons simplement qu'on doit s'assurer que certaines  $\mathcal{L}$ -géodésiques restent "loin" des chirurgies. Pour cela, on introduit un autre paramètre  $\delta \ll \varepsilon$ , et on effectue les chirurgies à partir de sphères médianes de  $\delta$ -cous (plutôt que de  $\varepsilon$ -cous) très longs et très courbés. On utilise aussi de manière cruciale un théorème de *persistence*, qui montre que sur les  $\delta$ -capuchons presque standard obtenus par chirurgie, la solution va évoluer pendant en temps déterminé (d'autant plus grand que  $\delta$  est petit) en restant proche de la solution standard ([BBB<sup>+</sup>10b] chapitre 8). Ceci donne facilement un contrôle du non effondrement local (et des voisinages canoniques) dans cette région.

Notons que l'existence de  $\delta$ -cous séparant les régions de petite et de grande courbure scalaire ne découle plus simplement de la propriété  $(VC)_r$  (elle ne donne *a priori* que des  $\varepsilon$ -cous), mais doit être démontrée à partir de cette propriété sur un intervalle donné. C'est possible grâce à un théorème d'existence qui fait dépendre les paramètres  $h$  et  $\Theta$  de  $r$  et  $\delta$  ([BBB<sup>+</sup>10b], théorème 6.2.1).

Une autre subtilité vient de ce que le paramètre  $\delta$  ci-dessus dépend de  $T$  mais aussi d'un rayon courant  $r' > 0$  tel que l'hypothèse  $(VC)_{r'}$  soit satisfaite. Pour éviter toute circularité dans le raisonnement, on montre l'existence des paramètres  $r, \delta$  et  $\kappa$  à l'aide de 3 propositions indépendantes ([BBB<sup>+</sup>10b] propositions A,B et C, section 5.3), où la dépendance relative des paramètres est exhibée. On explique alors comment, en les combinant, on obtient le résultat suivant (pour la définition formelle du flot de Ricci à bulles de paramètres  $(r, \delta, \kappa)$ , voir [BBB<sup>+</sup>10b, Définition 3.2.8]). Précisons avant cela une définition : une métrique  $g$  est *normalisée* si ses courbures sectionnelles sont bornées en valeur absolue par 1 et si toute boule-unité a un volume supérieur à la moitié du volume d'une boule-unité euclidienne. Par dilatation, on peut normaliser toute métrique d'une variété fermée.

**Théorème 2.1.** *Etant donné  $T > 0$ , il existe  $r, \delta, \kappa > 0$  tel que pour toute métrique  $g_0$  normalisée sur  $M$ , il existe sur  $M$  un flot de Ricci à bulles de paramètres  $(r, \delta, \kappa)$  défini sur  $[0, T]$ .*

Nous allons donner maintenant une définition de flot de Ricci à bulles ne retenant que les éléments essentiels, *suffisante pour démontrer l'elliptisation*, étant entendu qu'à l'heure actuelle la preuve de l'existence de ce flot requiert la version à paramètres.

**Définition 2.2.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Soit  $\{g(t)\}_{t \in I}$  une famille à un paramètres de métriques  $C^\infty$  de  $M$ , dont la dépendance en  $t$  est  $C^1$  par morceaux. On suppose qu'en tout temps singulier  $t_0$ ,  $t \mapsto g(t)$  est continue à gauche, et admet une limite à droite notée  $g_+(t_0)$ . On dit que  $\{g(t)\}$  est *flot de Ricci à bulles* sur  $M$  si

- i) l'équation  $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \text{Ric}_{g(t)}$  est vérifiée en tout temps régulier
- ii) Si  $t_0 \in I$  est un temps singulier, alors
  - a)  $R_{\min}(g_+(t_0)) \geq R_{\min}(g(t_0))$ ,
  - b)  $g_+(t_0) \leq g(t_0)$ .

On a alors le théorème suivant, où on rappelle que  $M$  est supposée fermée, orientable, irréductible et non sphérique.

**Théorème 2.3.** *Pour toute métrique  $g_0$  sur  $M$ , il existe un flot de Ricci à bulles  $\{g(t)\}$  défini sur  $[0, +\infty)$ , tel que  $g(0) = g_0$ .*

On obtient 2.3 en itérant dilatation et application du théorème 2.1.

Voyons comment déduire l'elliptisation, i.e. le théorème 1.6 i), du théorème 2.3.

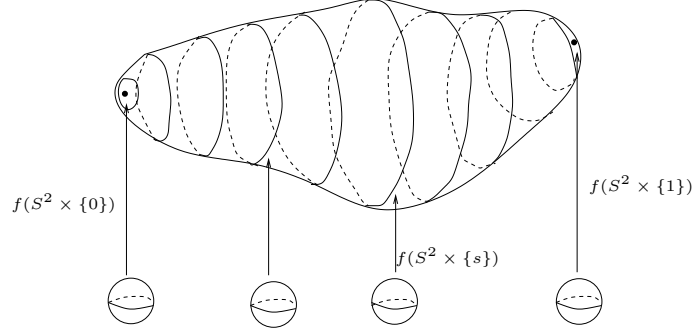
### 2.1.2 Le cas $\pi_1(M)$ fini : Elliptisation

Cela va découler, par contradiction, du résultat suivant (cf. [Per03a],[CM05]) :

**Théorème 2.4** (Extinction en temps fini). *Soit  $M$  une 3-variété fermée, orientable, irréductible, de groupe fondamental fini. Pour toute métrique riemannienne  $g_0$  sur  $M$ , il existe  $T(g_0) > 0$  tel que si  $g(\cdot)$  est un flot de Ricci à bulles sur  $M$  défini sur un intervalle  $[0, T]$  de donnée initiale  $g_0$ , alors  $T < T(g_0)$ .*

En effet, si on admet le théorème 2.4, la conjecture d'elliptisation se démontre comme suit : soit  $M$  une 3-variété fermée, orientable, irréductible, de groupe fondamental fini et  $g_0$  une métrique sur  $M$ . Si  $M$  n'est pas sphérique, le théorème 2.3 s'applique et fournit un flot de Ricci à bulles de donnée initiale  $g_0$ , défini sur  $[0, +\infty)$ , en contradiction avec le théorème 2.4.

On décrit maintenant la preuve du théorème 2.4, basée sur le résultat de Colding et Minicozzi [CM05]. Il s'agit de comprendre comment le flot de Ricci à bulles "reconnaît" que la variété est de groupe fondamental fini. Soit donc  $M$  satisfaisant les hypothèses du théorème. On considère l'espace  $\Omega$  des applications lisses  $f : S^2 \times [0, 1] \rightarrow M$  telles que  $f(S^2 \times \{0\})$  et  $f(S^2 \times \{1\})$  soient des points. L'hypothèse  $\pi_1(M)$  fini implique  $\pi_3(M) \neq 0$ , qui implique alors qu'il existe  $f_0 \in \Omega$  non homotope à une application constante [MM88, Lemma 3.3]. Cette application réalise alors un balayage<sup>7</sup> de la variété  $M$  par des images de sphères  $S^2$ .



Soit  $\xi$  la classe d'homotopie de  $f_0$ . On définit pour toute métrique  $g$  sur  $M$  la *largeur* de  $g$  par

$$W(g) := \inf_{f \in \xi} \max_{s \in [0,1]} E(f(\cdot, s))$$

où  $E$  est l'énergie de  $f$ , qui est définie par

$$E(f(\cdot, s)) := \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla_x f(x, s)|_g^2 dx,$$

la métrique sur  $S^2$  étant la métrique canonique. L'idée est que pour un flot de Ricci à bulles, la largeur  $W(g(t))$  atteint 0 en temps fini et que, puisque elle doit rester positive, cela donne une borne sur  $T$ . Précisément, si  $g(\cdot)$  est un flot de Ricci, la fonction  $t \mapsto W(g(t))$  vérifie, puisque  $\xi$  est nontrivial (cf. [CM05]),

$$\frac{d}{dt} W(g(t)) \leq -4\pi - \frac{1}{2} R_{\min}(t) W(g(t)), \quad (2.1)$$

$$\leq -4\pi + \frac{R_{\min}(0)}{\frac{4tR_{\min}(0)}{3} - 2} W(g(t)). \quad (2.2)$$

où on a utilisé (1.3). Notons que (1.3) est satisfaite par un flot de Ricci à bulles car en un temps singulier  $t_0$  on a  $R_{\min}(g_+(t_0)) \geq R_{\min}(g(t_0))$ . Par ailleurs, puisque  $g_+(t_0) \leq g(t_0)$ , on a  $W(g_+(t_0)) \leq W(g(t_0))$ . L'inégalité (2.2) est donc valable pour un flot de Ricci à bulles. Puisque son membre de droite n'est pas intégrable, on en déduit une borne supérieure sur  $T$  dépendant de  $R_{\min}(0)$  et de  $W(g(0))$ .

**Remarque 2.5.** Une autre conséquence du théorème 2.3 est que, sous ses hypothèses,  $M$  n'admet pas de métrique de courbure scalaire strictement positive. En effet, si  $g$  est telle que  $R_{\min}(g) > 0$ , nous venons de voir que le flot de Ricci à bulles de donnée initiale  $g$  vérifie toujours (1.3), donc que  $R_{\min}(t) \rightarrow +\infty$  pour  $t \rightarrow T \leq \frac{3}{2R_{\min}(0)}$ .

<sup>7</sup>Cette notion a été introduite par Birkhoff, dans le cas de courbes sur la 2-sphère, afin de trouver des géosésiques fermées

### 2.1.3 Cas $\pi_1(M)$ infini : Hyperbolisation

Nous présentons maintenant la preuve de la partie ii) du théorème 1.6. Elle repose sur un théorème d'effondrement faible et sur une version à paramètres du théorème 2.3, donnant une décomposition mince-épaisse de la variété  $(M, \tilde{g}(t))$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , où la renormalisation  $\tilde{g}(t) = (4t)^{-1}g(t)$  est motivée par l'évolution du flot de Ricci sur une variété hyperbolique. En effet, la résolution du flot de Ricci sur une 3-variété hyperbolique donne  $g(t) = (4t + 1)g_0$ , donc  $\tilde{g}(t) = (1 + \frac{1}{4t})g_0 \rightarrow g_0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Dans la suite, les variétés hyperboliques seront toujours complètes de volume fini.

Avant d'énoncer le théorème de décomposition mince-épaisse, nous introduisons deux définitions.

**Définition 2.6.** Soit  $(X, g)$  une 3-variété riemannienne et  $\varepsilon > 0$ . On dit que  $x \in X$  est  $\varepsilon$ -mince pour la métrique  $g$  s'il existe  $\rho \in (0, 1]$  tel que la boule  $B(x, \rho)$  a les deux propriétés suivantes : les courbures sectionnelles sont minorées par  $-\rho^{-2}$  sur  $B(x, \rho)$  et  $\text{vol } B(x, \rho) < \varepsilon\rho^3$ . Sinon on dit que  $x$  est  $\varepsilon$ -épais pour la métrique  $g$ .

**Définition 2.7.** Soit  $M$  une 3-variété et  $g_n$  une suite de métriques riemanniennes sur  $M$ . On dit que  $g_n$  est de courbure localement contrôlée au sens de Perelman si elle a la propriété suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\bar{r}(\varepsilon) > 0$ ,  $K_0(\varepsilon) > 0$ , et  $K_1(\varepsilon) > 0$  tels que pour tout  $n$  assez grand, si  $r \in (0, \bar{r}(\varepsilon)]$ , si la boule  $B(x, r) \subset (M, g_n)$  a ses courbures sectionnelles minorées par  $-r^{-2}$  et vérifie  $\text{vol } B(x, r) \geq \varepsilon r^3$ , alors  $|\text{Rm}(x)| < K_0 r^{-2}$  et  $|\nabla \text{Rm}(x)| < K_1 r^{-3}$ .

La partie III de [BBB<sup>+</sup>10b] est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 2.8** (Décomposition mince-épaisse). *Soit  $M$  une 3-variété fermée, orientable, irréductible et non sphérique. Pour toute métrique riemannienne  $g_0$  sur  $M$ , il existe un flot de Ricci à bulles  $g(\cdot)$  défini sur  $[0, +\infty)$ , tel que  $g(0) = g_0$  et satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (1) *Le volume de la métrique renormalisée  $\tilde{g}(t)$  est borné indépendamment de  $t$  quand  $t \rightarrow \infty$ ,*
- (2) *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute suite  $(x_n, t_n)$  de  $M \times [0, \infty)$ , si  $t_n \rightarrow \infty$  et si  $x_n$  est  $\varepsilon$ -épais pour  $\tilde{g}(t_n)$  pour tout  $n$ , alors il existe une 3-variété hyperbolique  $H$  et un point  $*$   $\in H$  tel qu'une sous-suite de  $(M, \tilde{g}(t_n), x_n)$  converge vers  $(H, g_{\text{hyp}}, *)$  pour la topologie  $C^2$  pointée,*
- (3) *Pour toute suite  $t_n \rightarrow \infty$ , la suite  $\tilde{g}(t_n)$  est de courbure localement contrôlée au sens de Perelman.*

**Remarque 2.9.** Observons que la conclusion (2) peut être vide, si la partie  $\varepsilon$ -épaisse de  $\tilde{g}(t)$  est vide pour tout  $t$  grand. C'est le cas par exemple si  $g_0$  est euclidienne, car alors le flot de Ricci est  $g(t) = g_0$  pour tout  $t$ , et  $\tilde{g}(t)$  s'effondre à courbure sectionnelle bornée (voir la section 2.2.1). Dans le cas où  $g_0$  est hyperbolique,  $\tilde{g}(t) = (1 + \frac{1}{4t})g_0 \rightarrow g_0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  et  $H = M$ . En effet, si  $\varepsilon > 0$  est assez petit, tout  $x \in M$  est  $\varepsilon$ -épais pour  $\tilde{g}(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Nous définissons maintenant un invariant topologique  $V_0(M)$ . Soit  $M$  une 3-variété. Un entrelacs  $L$  dans  $M$  est une 1-sous-variété fermée (éventuellement vide, éventuellement non connexe). Un entrelacs  $L$  est *hyperbolique* si son complémentaire dans  $M$ ,  $M \setminus L$ , peut-être muni d'une métrique hyperbolique. D'après [Mye82], toute 3-variété fermée admet au moins un entrelacs hyperbolique. On peut définir l'invariant  $V_0(M)$  comme l'infimum, lorsque  $L$  parcourt l'ensemble des entrelacs hyperboliques dans  $M$ , du volume de  $M \setminus L$ , où  $M \setminus L$  est muni de sa métrique hyperbolique. Cet infimum est réalisée par une 3-variété hyperbolique  $H_0 \subset M$  (voir par exemple [Mai09]), et  $H_0 = M$  si et seulement si  $M$  est hyperbolique (voir par exemple [Bes00]).

Dans la partie IV de [BBB<sup>+</sup>10b] (voir aussi le preprint [BBB<sup>+</sup>07]), on montre le résultat suivant, indépendant des parties I-III :

**Théorème 2.10** (Effondrement faible). *Soit  $M$  une variété fermée, orientable, irréductible, non simplement-connexe. On suppose qu'il existe une suite  $g_n$  de métriques riemanniennes sur  $M$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (1) *La suite  $\text{vol}(g_n)$  est bornée.*
- (2) *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute suite  $x_n \in M$ , si  $x_n$  est  $\varepsilon$ -épais pour la métrique  $g_n$  pour tout  $n$ , alors il existe une 3-variété hyperbolique  $H$  et un point  $* \in H$  tel qu'une sous-suite de  $(M, g_n, x_n)$  converge vers  $(H, g_{\text{hyp}}, *)$  pour la topologie  $C^2$  pointée, et  $\text{vol}(H) < V_0(M)$ ,*
- (3) *La suite  $g_n$  est de courbure localement contrôlée au sens de Perelman.*

*Alors  $M$  est une variété de Seifert ou contient un tore incompressible.*

Observons que l'hypothèse (2) peut être vide, par exemple si la partie  $\varepsilon$ -épaisse de  $g_n$  est vide pour tout  $n$  assez grand. Observons également que si  $g_n = \tilde{g}(t_n)$  avec  $g_0$  hyperbolique, l'inégalité sur le volume dans (2) est contredite puisque  $H = M$  (voir la remarque 2.9).

On explique la preuve de ce théorème dans la sous-section suivante. Voyons d'abord comment déduire l'hyperbolisation des théorèmes 2.8 et 2.10.

*Preuve du théorème 1.6(ii).* On suppose que  $M$  est fermée, orientable, irréductible, atoroidale et de groupe fondamental infini. Supposons la de plus non hyperbolique, i.e. n'admettant pas de métrique hyperbolique, et montrons qu'elle est de Seifert. La 3-variété  $H_0 \subset M$  réalisant  $V_0(M)$  est donc différente de  $M$ . Ceci signifie que  $H_0 = M \setminus L_0$  où  $L_0$  est un entrelacs non vide de  $M$ . D'après un argument de M. Anderson [And02, p. 21-23], on peut modifier la métrique hyperbolique de  $H_0$  dans un voisinage tubulaire de  $L_0$ , et prolonger la métrique obtenue en une métrique  $g_0$  sur  $M$  telle que  $R_{\min}(g_0) = -6$  et  $\text{vol}(g_0) < \text{vol}(H_0) = V_0(M)$ . On applique alors le théorème 2.8 avec  $g_0$  comme donnée initiale, et on pose  $g_n = \tilde{g}(n)$ . La suite  $g_n$  vérifie les hypothèses (1) et (3) du théorème 2.10. Le théorème 2.8 implique également que l'hypothèse (2) du théorème 2.10 est satisfaite, à l'exception de l'inégalité  $\text{vol}(H) < V_0(M)$  qu'il s'agit maintenant de vérifier. Pour cela on considère la quantité, invariante par dilatation :

$$\hat{V}(g) := \left( \frac{R_{\min}(g)}{-6} \right)^{3/2} \text{vol}(g) \geq 0.$$

(rappelons que  $M$  n'admet pas de métrique à courbure scalaire strictement positive, cf remarque 2.5). Remplacer  $g$  par  $\left( \frac{R_{\min}(g)}{-6} \right) g$  est une renormalisation qui fixe le minimum de la courbure scalaire à  $-6$  (si non nul), comme sur une variété hyperbolique.  $\hat{V}(g)$  apparait alors comme le volume de la métrique renormalisée (si non nul).

Le long d'un flot de Ricci à bulles, la fonction  $t \mapsto \hat{V}(g(t))$  a la propriété d'être décroissante. Au temps singuliers, cela vient de décroissance de la métrique et de la croissance de  $R_{\min}$  (cf définition 2.2(ii)). Aux temps réguliers c'est un calcul facile utilisant la formule (1.2) et le fait que

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(g(t)) = - \int_M R(g(t)) dv_{g(t)}$$

On peut vérifier alors que, si  $(M, g_n, x_n)$  sous-converge vers une variété hyperbolique  $(H, g_{\text{hyp}}, *)$  comme cela a déjà été établi par le théorème 2.8(2), on a  $R_{\min}(g(t)) \approx \frac{3}{2t}$ , donc  $R_{\min}(\tilde{g}(t)) \rightarrow -6$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et

$$\text{vol}(H) \leq \lim \text{vol}(g_n) = \lim \hat{V}(g_n) = \lim \hat{V}(g(n)) \leq \hat{V}(g(0)) = \text{vol}(g(0)) < V_0(M),$$

où la deuxième égalité découle de l'invariance par homothéties de  $\hat{V}$ . La conclusion du théorème 2.10 est que  $M$  est de Seifert ou contient un tore incompressible. Puisqu'on a supposé  $M$  atoroidale, on obtient bien que  $M$  est de Seifert.  $\square$

## 2.2 Effondrement faible

Cette sous-section est consacrée à la démonstration du théorème 2.10.

### 2.2.1 Effondrement et effondrement faible

La notion d'*effondrement* habituelle aux géomètres est la suivante : on dit qu'une suite de métriques riemanniennes  $g_n$  s'*effondre à courbure sectionnelle bornée* si les courbures sectionnelles des métriques restent bornées alors que le rayon d'injectivité tend partout uniformément vers 0. C'est le cas des métriques  $N \times \frac{1}{n}S^1$ , ou plus généralement des produits d'une variété riemannienne fermée et d'une variété fermée plate.

Jeff Cheeger et Michael Gromov [CG86, CG90] ont montré qu'une variété donnée  $M$  admet une suite de métriques s'effondrant au sens ci-dessus si et seulement si  $M$  admet une *F-structure*, qui est une sorte d'action de tores généralisée. Sur une 3-variété fermée orientable, l'existence d'une F-structure implique celle d'une partition en orbites qui sont des cercles ou des tores, telle que chaque orbite ait un voisinage saturé. Une telle variété est donc une *variété graphée*. On dit qu'une 3-variété compacte, orientable est graphée si elle est une union de fibrés en cercle recollés le long de leurs bords. On a la description géométrique suivante : si  $M$  est irréductible, alors elle est graphée si et seulement si tous les morceaux de la décomposition de Jaco-Shalen-Johansson sont de Seifert. Si de plus  $M$  est atoroidale, elle est donc graphée si et seulement si elle est de Seifert.

R. Hamilton avait suggéré que la théorie de Cheeger-Gromov pourrait être utile pour reconnaître les variétés graphées lors de l'étude en temps long du flot de Ricci. Toutefois, la théorie actuelle du flot de Ricci (avec chirurgie) ne produit pas en général de suites de métriques de courbure sectionnelle bornée. C'est pourquoi Perelman considère une autre notion d'effondrement, reliée à une borne inférieure locale de courbure, plus adaptée aux métriques produites par le flot de Ricci avec chirurgie.

**Définition 2.11.** Soit  $g_n$  une suite de métriques riemanniennes sur une 3-variété  $M$ . On dit que  $g_n$  s'*effondre au sens de Perelman* si  $g_n$  est de courbure localement contrôlée au sens de Perelman, et s'il existe une suite de nombres  $\varepsilon_n > 0$  tendant vers 0, telle que pour tout  $n$ , tout point de  $M$  est  $\varepsilon_n$ -mince pour  $g_n$ .

Un cas particulier d'un théorème d'effondrement énoncé sans preuve dans [Per03b, Section 7.4] peut être formulé comme suit :

**Théorème 2.12** (Théorème d'effondrement de Perelman, cas des variétés fermées). *Soit  $M$  une 3-variété fermée, orientable, admettant une suite de métriques  $g_n$  s'effondrant au sens de Perelman. Alors  $M$  est une variété graphée.*

Nous verrons que ce théorème découle de la preuve du théorème 2.10, modulo les hypothèses topologiques supplémentaires d'irréductibilité et de non simple connexité. En effet, une suite  $g_n$  qui s'effondre au sens de Perelman vérifie les hypothèses (2) et (3) du théorème 2.10 : pour

tout  $\varepsilon > 0$ , si tout point de  $M$  est  $\varepsilon_n$ -mince pour la métrique  $g_n$ , tout point de  $M$  est  $\varepsilon$ -mince pour la métrique  $g_n$  dès que  $n$  est assez grand, donc l'hypothèse (2) est trivialement vérifiée. De plus, l'hypothèse (1) n'est pas utilisée dans la preuve du théorème 2.10 dans ce cas. Enfin, la conclusion de la preuve sera que  $M$  est graphée, comme dans 2.12, ce qui est plus précis que "Seifert ou contient un tore incompressible"<sup>8</sup>.

Le théorème 2.10 est plus général que le théorème 2.12 dans le sens qu'on ne requiert pas que la partie  $\varepsilon$ -épaisse soit vide, mais simplement qu'elle ait un "petit volume", et précisément que les limites hyperboliques extraites de la partie  $\varepsilon$ -épaisse soient de volume strictement inférieur à  $V_0(M)$ . C'est pourquoi on parle d'*effondrement faible*. Toutefois, la conclusion n'est pas que la variété est graphée. En 2.2.3, nous donnerons une variante du théorème d'effondrement faible utilisant un invariant  $V'_0(M) \leq V_0(M)$ , qui conclura que  $M$  est graphée.

Le cas de l'effondrement au sens de Perelman est traité dans l'article [BBB<sup>+</sup>10a], et le cas d'effondrement faible du théorème 2.10 constitue la partie IV du livre [BBB<sup>+</sup>10b].

## 2.2.2 Volume simplicial et arguments de recouvrement

Notre stratégie pour démontrer le théorème 2.10 est de montrer que, si la variété ne contient pas de tore incompressible, elle est graphée (donc de Seifert). Pour cela on utilise de façon essentielle le *volume simplicial* défini par M. Gromov [Gro82], deux arguments de recouvrements et le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston des variétés de Haken (théorème 1.5).

Nous commençons par donner la définition du volume simplicial, et énoncer quelques propriétés fondamentales de ce volume, en relation avec les structures topologiques et géométriques.

**Définition 2.13.** – Une *n*-chaîne réelle  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i$  est une combinaison linéaire de *n*-simplexes

- $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow M$ ,
- Un *n*-cycle est une *n*-chaîne réelle fermée,
- Le *volume simplicial*  $\|M\|$  d'une *n*-variété compacte, orientable  $M$  est défini comme l'infimum de  $\sum_{i=1}^k |\lambda_i|$  pour tous les *n*-cycles  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i$  représentant la classe fondamentale de  $H_n(M, \partial M; \mathbb{R})$ .

On vérifie directement d'après la définition que si  $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$  est une application propre, alors  $\|M\| \geq \deg(f) \|N\|$ . En particulier si  $M$  admet une application dans elle-même de degré  $d$  avec  $|d| > 1$ , alors  $\|M\| = 0$ . Par exemple  $\|S^n\| = \|T^n\| = 0$ . De même, les variétés sphériques ou euclidiennes ont un volume simplicial nul. Plus généralement, il découle de [Yan82] que si  $M$  est de Seifert, alors  $\|M\| = 0$ . *A contrario*, si  $M$  est une variété hyperbolique (à bord torique ou vide), M. Gromov et W. Thurston ont montré que  $\|M\| = \frac{\text{vol}(M)}{v_n}$ , où  $v_n$  est le volume d'un *n*-simplexe idéal hyperbolique régulier. Par ailleurs, M. Gromov a montré que le volume simplicial des 3-variétés est additif par somme connexe et recollement le long de tores incompressibles [Gro82]. Par conséquent, si  $M$  admet une décomposition géométrique  $M = H \cup G$ , où  $H$  est hyperbolique et  $G$  est graphée, alors  $\|M\| = \text{vol}(H)/v_3$ . En particulier :

**Théorème 2.14.** *Si  $M$  est une 3-variété fermée, orientable, admettant une décomposition géométrique, alors  $\|M\| = 0$  si et seulement si  $M$  est graphée.*

<sup>8</sup>En effet, si la variété est graphée, ou bien elle contient un tore incompressible, ou bien elle n'en contient pas et elle est de Seifert. Par contre une variété peut contenir un tore incompressible sans être graphée : considérer la variété obtenue en recollant 2 copies d'une variété hyperbolique à cusp le long des tores



Le lecteur aura noté que, pour démontrer le théorème 2.10, à supposer qu'on obtienne  $\|M\| = 0$ , on ne peut pas utiliser le théorème ci-dessus pour conclure puisqu'il suppose la variété géométrisable, alors que c'est ce qu'on veut montrer. L'astuce, que nous détaillerons plus loin, va consister à se ramener au cas des variétés de Haken, qui sont géométrisables par le théorème 1.5. On utilisera également une variante du théorème ci-dessus. L'idée à retenir est que c'est bien de l'annulation d'un certain volume simplicial qu'on déduira que la variété est graphée.

Expliquons maintenant comment on peut montrer la nullité du volume simplicial grâce à des arguments de recouvrements. C'est une technique due à M. Gromov. Nous avons besoin de quelques définitions. On dit qu'un recouvrement d'une variété  $X$  par des ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  est *de dimension au plus  $d$*  si tout point de  $X$  appartient à au plus  $d + 1$  ouverts du recouvrement. Un ouvert connexe  $U \subset X$  est *moyennable* (resp. *virtuellement abélien*) si l'image  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$  est moyennable (resp. *virtuellement abélienne*). Un ouvert  $U \subset X$  est moyennable si chaque composante connexe l'est.

**Théorème 2.15** (Théorème d'annulation de Gromov). *Soit  $X$  une  $n$ -variété. Si  $X$  admet un recouvrement par des ouverts moyennables, de dimension au plus  $n - 1$ , alors  $\|X\| = 0$ .*

Nous pouvons maintenant donner le synopsis de la preuve du théorème 2.10. On suppose que  $M$  est une 3-variété fermée, orientable, irréductible et non simplement connexe et que  $g_n$  est une suite de métriques sur  $M$  satisfaisant les hypothèses du théorème. Pour plus de simplicité, expliquons d'abord le cas où la suite  $g_n$  s'effondre au sens de Perelman, comme dans l'article [BBB<sup>+</sup>10a] (on n'a pas besoin alors de l'hypothèse (1) et (2) est trivialement vérifiée).

**Le cas d'effondrement au sens de Perelman** On commence par expliquer un argument de recouvrement montrant que  $\|M\| = 0$ , même s'il n'est pas conclusif, comme on l'a dit ci-dessus. Nous verrons juste après comment le modifier pour qu'il le soit, ce qui nécessitera un deuxième argument de recouvrement.

Grâce à l'hypothèse de courbure contrôlée au sens de Perelman, on montre que pour tout  $n$  assez grand, tout point  $x \in M$  a un voisinage  $U_x$  dans  $(M, g_n)$ , proche d'une boule métrique d'une variété de courbure positive ou nulle, de petit volume comparé au cube du rayon. Ces voisinages sont appelés dans la suite des *modèles locaux*. On peut supposer tous les modèles locaux non compacts, l'hypothèse contraire impliquant que  $M_n$  est difféomorphe à une variété compacte à courbure positive ou nulle<sup>9</sup>, lesquelles sont graphées. La classification des variétés complètes à courbure positive ou nulle montre que ces modèles locaux sont virtuellement abéliens<sup>10</sup>, donc moyennables. On peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini  $U_1, \dots, U_p$  de dimension  $d$ , où  $d$  (mais pas  $p$ ) peut-être majoré indépendamment de  $n$  par des arguments de remplissages utilisant l'inégalité de Bishop-Gromov. Une technique empruntée à Gromov permet ensuite, en modifiant ces ouverts, de descendre la dimension à 3, puis à 2 en utilisant l'hypothèse sur les volumes et l'inégalité de Bishop-Gromov à nouveau. On déduit alors de 2.15 que  $\|M\| = 0$ . Toutefois on ne peut utiliser 2.14 pour conclure, puisqu'il requiert que  $M$  admette une décomposition géométrique. L'astuce, qui remonte à [BLP05], est la suivante. Elle consiste à trouver un modèle local  $U$  tel que chaque composante connexe de  $M \setminus U$  soit de Haken. Nous

<sup>9</sup>une telle variété est sphérique, euclidienne, ou difféomorphe à  $S^2 \times S^1$  ou  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$

<sup>10</sup>Sous nos hypothèses, un modèle local est difféomorphe à  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ,  $T^2 \times \mathbb{R}$  ou le fibré tordu sur la bouteille de Klein  $K^2 \tilde{\times} \mathbb{R}$

expliquerons plus bas comment trouver ce modèle local, grâce à un autre argument de recouvrement. Ce modèle local  $U$  peut être un tore solide  $S^1 \times D^2$ , un tore épaissi  $T^2 \times (0, 1)$  ou un intervalle tordu sur la bouteille de Klein  $K^2 \tilde{\times} I$ . Chaque composante connexe  $Y$  de  $M \setminus U$  est une variété de Haken dont le bord est une union de tores. L'argument de recouvrement détaillé ci-dessus peut-être appliqué sur chaque remplissage de Dehn<sup>11</sup>  $\bar{Y}$  de  $Y$  et montre que  $\bar{Y}$  admet un recouvrement de dimension au plus 2 par des ouverts virtuellement abéliens, donc est de volume simplicial nul par le théorème 2.15. On utilise alors la variante suivante du théorème 2.14, conséquence du théorème d'hyperbolisation de Thurston (voir [BMP03, Prop. 9.36]) :

**Théorème 2.16.** *Soit  $Y$  une variété de Haken, dont le bord est une union de tores. On suppose que tout remplissage de Dehn  $\bar{Y}$  de  $Y$  est de volume simplicial nul. Alors  $Y$  est une variété graphée.*

Chaque composante connexe  $Y$  de  $M \setminus U$  étant graphée, on peut alors conclure que  $M$  elle-même est graphée.

On détaille maintenant l'argument de recouvrement utilisé pour trouver un modèle local  $U$  rendant les composantes connexes de  $M \setminus U$  de Haken. Rappelons qu'une variété (connexe) est de Haken si elle est irréductible, et est de bord non vide ou contient une surface essentielle. Puisque que les composantes connexes de  $M \setminus U$  sont de bord non vide par construction, il suffit qu'elles soient irréductibles pour être de Haken. Puisque  $M$  est irréductible, il suffit pour cela que  $U$  ne soit pas contenu dans une boule. C'est le cas en particulier si  $U$  est homotopiquement non trivial dans  $M$ , i.e.  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(M)$  est d'image non triviale. Pour trouver un modèle local  $U$  homotopiquement non trivial, on procède par contradiction. On suppose que tous les modèles locaux  $U_i$  du recouvrement initial sont homotopiquement triviaux, et on se ramène par la même technique que dans le premier argument de recouvrement à un recouvrement de  $M$  de dimension au plus 2 par des ouverts homotopiquement triviaux dans  $M$ . La contradiction vient cette fois du théorème suivant [GLGA92, Section 3] :

**Théorème 2.17.** *Soit  $X$  une 3-variété fermée, orientable, irréductible. Si  $X$  a un recouvrement de dimension 2 par des ouverts homotopiquement triviaux dans  $X$ , alors  $X$  est simplement connexe.*

C'est ici qu'on utilise l'hypothèse que  $M$  n'est pas simplement connexe. Remarquons qu'on n'a pas utilisé l'hypothèse (1) du théorème, et qu'on montre bien que variété est graphée.

**Le cas général d'effondrement faible** On suppose maintenant que l'hypothèse (2) du théorème n'est pas trivialement vraie : la partie épaisse peut être non vide. On suppose que la variété ne contient pas de tore incompressible, et on cherche à montrer qu'elle est graphée. On commence par couvrir la partie épaisse de  $(M, g_n)$  d'un nombre fini de sous-variétés  $H_n^i$ , obtenues par approximations du coeur compact de limites hyperboliques  $H^1, \dots, H^q$  données par l'hypothèse (2). L'hypothèse (1) est utilisée pour majorer  $q$ . L'hypothèse d'atoroïdalité de  $M$  implique que les composantes des  $\partial H_n^i$  sont compressibles dans  $M$ , ce qui permet de montrer que les sous-variétés  $H_n^i$  sont des tores solides ou contenues dans des boules, donc sont simples d'un point de vue topologique. On recouvre ensuite la partie mince par des modèles locaux. On fait alors les deux arguments de recouvrement ci-dessus, avec les  $H_n^i$  et les modèles locaux,

<sup>11</sup>Un remplissage de Dehn d'une variété bordée par des tores  $T_1, \dots, T_n$  consiste à coller un tore solide  $V_i$  sur chaque  $T_i$ . Il est déterminé uniquement par le choix d'une classe d'isotopie d'une courbe simple fermée  $\gamma_i \subset T_i$  telle que  $\gamma_i$  borde un disque dans  $V_i$

pour trouver un ouvert  $U$  homotopiquement non trivial, puis pour montrer la nullité du volume simplicial du remplissage de Dehn de chaque composante connexe de  $M \setminus U$ . On conclut avec le théorème 2.16 comme précédemment.

### 2.2.3 Un autre théorème d'effondrement faible

Etant donné une 3-variété fermée  $M$ , on définit  $V'_0(M)$  comme l'infimum des volumes des sous-variétés hyperboliques  $H \subset M$  qui sont telles que  $H$  est le complément d'un entrelacs de  $M$ , ou bien une composante au moins de  $\partial H$  est incompressible dans  $M$ . Par définition,  $0 < V'_0(M) \leq V_0(M)$ . On a la variante suivante du théorème 2.10,  $V'_0(M)$  remplaçant  $V_0(M)$  et la conclusion étant que la  $M$  est graphée [BBB<sup>+</sup>10b, 15.1.2] :

**Théorème 2.18** (Effondrement faible). *Soit  $M$  une variété fermée, orientable, irréductible, non simplement-connexe. On suppose qu'il existe une suite  $g_n$  de métriques riemanniennes sur  $M$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (1) *La suite  $\text{vol}(g_n)$  est bornée.*
- (2) *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute suite  $x_n \in M$ , si  $x_n$  est  $\varepsilon$ -épais pour la métrique  $g_n$  pour tout  $n$ , alors il existe une 3-variété hyperbolique  $H$  et un point  $*$   $\in H$  tel qu'une sous-suite de  $(M, g_n, x_n)$  converge vers  $(H, g_{\text{hyp}}, *)$  pour la topologie  $C^2$  pointée, et  $\text{vol}(H) < V'_0(M)$ ,*
- (3) *La suite  $g_n$  est de courbure localement contrôlée au sens de Perelman.*

*Alors  $M$  est graphée.*

Ce théorème généralise le théorème 2.12 (modulo les hypothèses d'irréductibilité et de non simplement-connexité). La preuve est identique à celle expliquée ci-dessus, l'hypothèse  $\text{vol}(H) < V'_0(M)$  étant utilisée pour montrer que les composantes des  $\partial H_n^i$  sont compressibles dans  $M$ .

## 3 3-variétés de courbure scalaire positive

### 3.1 Introduction

La topologie des 3-variétés ouvertes est beaucoup moins connue que celle des 3-variétés compactes. Il n'y a pas par exemple d'équivalent du théorème de décomposition de Kneser qui, rappelons-le, décompose la variété en somme connexe de composantes homéomorphes à  $S^1 \times S^2$  ou irréductibles (voir les contre-exemples de P. Scott et S. Maillot [ST89] [Mai08b]). Dans le cadre non compact, il faut naturellement préciser la notion de somme connexe, qui peut porter sur un nombre infini d'éléments.

**Définition 3.1.** Soit  $\mathcal{X}$  une famille de 3-variétés. On dit qu'une 3-variété  $M$  est une *somme connexe d'éléments de  $\mathcal{X}$*  s'il existe un graphe localement fini  $G$  et une application  $v \mapsto X_v$  qui associe à chaque sommet de  $G$  une copie d'une variété de  $\mathcal{X}$ , tel que en enlevant à chaque  $X_v$  autant de 3-boules que d'arêtes issues de  $v$ , et en recollant  $X_v$  et  $X_{v'}$  dès qu'il existe une arête qui joint  $v$  et  $v'$  (le recollement se faisant alors par identification des bords des 3-boules de  $X_v$  et  $X_{v'}$  correspondant à l'arête), on obtienne une variété diffeomorphe à  $M$ .

On obtient par exemple  $\mathbb{R}^3$  comme somme connexe infinie d'éléments de  $\mathcal{X} := \{S^3\}$ , en prenant comme graphe  $G = \mathbb{N}$  muni d'arêtes entre  $n$  et  $n + 1$ . On obtient  $S^2 \times \mathbb{R}$  en prenant le graphe similaire sur  $\mathbb{Z}$ .

Du point de vue des géomètres, il est naturel, pour tenter de classifier les 3-variétés ouvertes, de considérer des 3-variétés riemanniennes satisfaisant certaines hypothèses de courbure. Nous considérerons les 3-variétés riemanniennes complètes  $(M, g)$  telles que  $R_{\min}(g) > 0$ . On dira qu'elle ont une courbure scalaire *uniformément positive*.

Dans le cas compact cette condition équivaut bien sûr à avoir une courbure scalaire strictement positive. Dans le cas compact, ces 3-variétés sont maintenant bien connues :

**Théorème 3.2** ([GL83],[Per02, Per03b, Per03a]). *Une 3-variété fermée orientable admet une métrique de courbure scalaire strictement positive si et seulement si elle est une somme connexe de variétés sphériques et de  $S^1 \times S^2$ .*

Un sens de l'équivalence ci-dessus découle de la construction de Gromov-Lawson, qui munit une somme connexe de variétés à  $R_{\min} > 0$  d'une métrique à  $R_{\min} > 0$  (leur construction est explicite et dépend essentiellement du rayon d'injectivité et de  $R_{\min}$  de chaque variété). La réciproque, due à Perelman, découle de sa construction du flot de Ricci avec chirurgie et de l'extinction en temps fini de ce flot si  $R_{\min}(0) > 0$  (voir remarque 2.5).

Dans le cas non compact, la condition  $R_{\min} > 0$ , plutôt que  $R > 0$ , est nécessaire pour espérer obtenir une équivalence semblable :  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ , où  $\mathbb{R}^2$  est muni d'une métrique de type parabolique, satisfait  $R > 0$  (et  $R_{\min} = 0$ ) et n'est pas décomposable en une somme connexe de variétés sphériques et de  $S^1 \times S^2$ . C'est pourquoi on considère la condition de courbure scalaire uniformément positive. Pour avancer, on peut supposer également que la métrique est de *géométrie bornée* : ses courbures sectionnelles sont bornées et son rayon d'injectivité strictement positif. Dans le preprint [BBM09] écrit en collaboration avec Gérard Besson et Sylvain Maillot, on généralise comme cela le résultat de Perelman :

**Théorème 3.3** ([BBM09]). *Soit  $M$  une 3-variété orientable admettant une métrique riemannienne complète, à géométrie bornée et de courbure scalaire uniformément positive. Alors il existe une famille finie  $\mathcal{F}$  de variétés sphériques telle que  $M$  est une somme connexe de copies de  $S^1 \times S^2$  et d'éléments de  $\mathcal{F}$ .*

On attire l'attention sur le fait que  $\mathcal{F}$  est finie (et ne dépend en fait que des bornes géométriques et de  $R_{\min}$ ). La réciproque du théorème est encore vraie : la construction de Gromov-Lawson munit toute somme connexe de  $S^1 \times S^2$  et d'éléments d'une telle famille finie  $\mathcal{F}$  d'une métrique complète à géométrie bornée de courbure scalaire uniformément positive. Notons que si on considère une famille  $\mathcal{F} = (S_i)_{i \in \mathbb{N}}$  infinie, dont on fait la somme connexe par exemple en joignant  $S_i$  à  $S_{i+1}$ , on peut obtenir une métrique complète à géométrie bornée, ou à courbure scalaire uniformément positive (en dilatant convenablement les métriques rondes des  $S_i$ ), mais pas avec les deux propriétés simultanément.

On a comme corollaire le théorème de finitude suivant. On rappelle qu'une 3-variété  $M$  est *première* si, dès que  $M = M_1 \sharp M_2$ , alors  $M_1$  ou  $M_2$  est diffeomorphe à  $S^3$ .

**Corollaire 3.4.** *Soit  $R_0, Q$  et  $\rho$  des nombres strictement positifs. Alors l'ensemble des 3-variétés premières admettant une métrique riemannienne complète de courbures sectionnelles bornées en valeurs absolues par  $Q$ , de rayon d'injectivité minoré par  $\rho$ , de courbure scalaire minorée par  $R_0$ , est fini à diffeomorphisme près.*

C'est un résultat dans l'esprit du théorème de finitude de Cheeger [Che70], qui rappelons-le affirme que l'ensemble des  $n$ -variétés riemanniennes fermées de courbure sectionnelle bornée en

valeur absolue par un nombre  $K$ , de diamètre inférieur à un nombre  $d$ , et de volume supérieur à un nombre  $v > 0$ , n'admet qu'un nombre fini de type de difféomorphismes. Evidemment nous n'avons plus de borne sur le diamètre.

### 3.2 Solutions chirurgicales du flot de Ricci

La preuve du théorème 3.3 repose sur une variante du flot de Ricci à bulles qu'on appelle *solution chirurgicale* du flot de Ricci. On conserve l'idée que les chirurgies sont déclenchées lorsque la courbure scalaire atteint un seuil  $\Theta$ , ce qui permet de contrôler les courbures le long du flot. Mais cette fois les chirurgies modifient la topologie de la variété : elles la décomposent en plusieurs composantes connexes (éventuellement une infinité) sur lesquelles le flot évolue indépendamment. Contrairement à la situation précédente, certaines composantes peuvent développer une courbure scalaire uniformément grande, c'est-à-dire plus grande que  $r^{-2}$  partout sur la composante, où  $r$  est toujours l'échelle des voisinages canoniques<sup>12</sup>. On ne peut prolonger le flot sur ces composantes. Cependant, de leur recouvrement par des voisinages canoniques on peut déduire leur topologie : ces composantes sont sphériques ou difféomorphes à  $S^1 \times S^2$ ,  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}P^3$  moins un point. Il est attendu que de telles variétés apparaissent au fur et à mesure des chirurgies. Notons que toutes ces variétés sont des sommes connexes de variétés sphériques et de  $S^1 \times S^2$  (en fait les composantes non sphériques apparaissant sont des sommes connexes de  $S^1 \times S^2$ ,  $S^3$  et  $\mathbb{R}P^3$  seulement).

Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition 3.5.** Une *solution chirurgicale* est une suite de flots de Ricci  $\{(M_i, g_i(t))_{t \in [t_i, t_{i+1}]}\}$ , où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots \leq +\infty$  est discret dans  $\mathbb{R}$ ,  $M_i$  peut-être non connexe ou vide et telle que

- $M_{i+1}$  est obtenue à partir de  $M_i$  de la manière suivante (1) on découpe  $M_i$  le long d'une famille localement finie de 2-sphères plongées disjointes et on recolle des 3-boules sur les 2-sphères de bord (2) on enlève les composantes connexes de la nouvelle variété qui sont sphériques où difféomorphes à  $S^1 \times S^2$ ,  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}P^3$  moins un point.
- Si  $M_{i+1}$  est non vide,  $R_{\min}(g_{i+1}(t_{i+1})) \geq R_{\min}(g_i(t_{i+1}))$ .

On dit que les composantes connexes enlevées *disparaissent*. Si toutes les composantes connexes disparaissent, i.e.  $M_{i+1} = \emptyset$  et  $t_{i+1} = +\infty$ , on déclare la solution *éteinte*. Dans ce cas, on peut montrer que la variété de départ  $M_0$  est une somme connexe de variétés sphériques et de  $S^1 \times S^2$ . C'est la stratégie employée pour montrer le théorème 3.3. Pour obtenir la finitude de  $\mathcal{F}$ , nous avons besoin d'un théorème d'existence de solutions chirurgicales qui soit *quantitatif* sur les composantes qui disparaissent.

Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on dit que  $(M, g)$  est  $\varepsilon$ -ronde si elle  $\varepsilon$ -proche, après homothétie, d'une métrique qui soit ronde, i.e. de courbure sectionnelle constante  $> 0$ . Nous montrons [BBM09, Théorème 1.3] :

**Théorème 3.6.** *Pour tout  $\rho_0, T > 0$ , il existe  $Q, \rho > 0$  tels que, si  $(M_0, g_0)$  est une 3-variété riemannienne complète orientable, de courbures sectionnelles bornées en valeur absolue par 1 et de rayon d'injectivité minoré par  $\rho_0$ , il existe une solution chirurgicale complète définie sur  $[0, T]$ , de condition initiale  $g_0$ , de courbures sectionnelles bornées en valeur absolue par  $Q$ , de*

<sup>12</sup>La liste des voisinages canoniques est plus longue qu'en 2.1.1 qu'il n'y a pas d'hypothèse topologique sur la variété : il faut ajouter les variétés compactes à courbure  $> 0$  et des  $\varepsilon$ -capuchons de topologie  $\mathbb{R}P^3$  moins un point

rayon d'injectivité minoré par  $\rho$ , et dont toutes les composantes sphériques qui disparaissent ont courbure scalaire  $\geq 1$ , et sont  $10^{-3}$ -rondes ou difféomorphes à  $S^3$  ou  $\mathbb{R}P^3$ .

En particulier leur type topologique est fini d'après le théorème de finitude de Cheeger [Che70]. Pour prouver le théorème 3.3, il suffit alors d'avoir une estimée *a priori* du temps  $T$  d'extinction d'une solution chirurgicale dont la donnée initiale  $g_0$  satisfait  $R_{\min}(g_0) > 0$ . D'après (1.3), qui est satisfait par toute solution chirurgicale (non vide),  $T \leq \frac{3}{2R_{\min}(g_0)}$ .

Notons que par dilatation et itération on obtient le théorème suivant, où il n'est pas exclu que la solution s'éteigne :

**Théorème 3.7.** *Soit  $M$  une 3-variété orientable. Soit  $g_0$  une variété riemannienne complète à géométrie bornée. Alors il existe une solution chirurgicale complète à géométrie bornée sur  $[0, +\infty)$ , de donnée initiale  $g_0$ .*

Ici les bornes géométriques dépendent de  $t$ .

## Deuxième partie

# Rigidité différentielle

### 4.3 Phénomènes de rigidité

Dans cette partie on s'intéresse au phénomène de rigidité, qu'on définit de la manière suivante : dans une classe d'espaces, qu'on souhaite la plus vaste possible, un objet muni d'une certaine structure géométrique doit être, en certain sens, unique. La structure géométrique peut-être par exemple une condition de courbure, et l'unicité signifier une équivalence par isométrie ou par difféomorphisme (on parle dans ce dernier cas de rigidité différentielle).

Le prototype d'un tel phénomène est le célèbre théorème de rigidité forte de Mostow :

**Théorème 4.8** ([Mos73]). *Soient  $X, Y$  deux  $n$ -variétés hyperboliques fermées de dimension  $n \geq 3$ . On suppose que  $\pi_1(X)$  et  $\pi_1(Y)$  sont isomorphes. Alors  $X$  et  $Y$  sont isométriques.*

Un exemple de rigidité topologique est donné par le résultat suivant, du à F.T Farrell et L.E. Jones :

**Théorème 4.9** ([FJ90]). *Soit  $X^n$  une variété fermée de courbure sectionnelle négative ou nulle. Soit  $h : Y^n \rightarrow X^n$  une équivalence d'homotopie, où  $Y^n$  est une variété fermée. Si  $n \geq 5$ ,  $h$  est homotope à un homéomorphisme.*

L'unicité dans la classe d'équivalence d'homotopie n'est qu'à homéomorphisme près, et il n'y a pas, sans ajouter d'hypothèse sur  $X$ , de rigidité plus forte, puisque les auteurs ont produit des exemples de variétés homéomorphes, mais non difféomorphes, à des variétés hyperboliques (voir par exemple [FJ89]).

Un moyen de produire des métriques "canoniques" peut-être de considérer les extremas ou les points critiques d'une fonctionnelle sur l'espace des métriques d'une ou d'une classe de variétés. En cas de bonne convexité de la fonctionnelle, on peut espérer une certaine unicité de la métrique

canonique et donc avoir un phénomène de rigidité. On peut illustrer ce principe avec une fonctionnelle très simple, le volume. Combinée avec des bornes de courbure, elle donne lieu en effet à des propriétés remarquables de rigidité. Une borne de courbure est une normalisation naturelle puisque en dilatant une métrique donnée on peut lui donner n'importe quel volume. Considérons la condition de courbure  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ , motivée par le fait que sur une variété hyperbolique  $(X^n, g_0)$  on a  $\text{Ric}_{g_0} = -(n-1)g_0$ . On s'intéresse aux métriques de plus petit volume, sur la classe des variétés compactes  $Y^n$  qui *dominent*  $X$ , i.e. telle qu'il existe une application continue  $f : Y \rightarrow X$  de degré 1. On a alors le phénomène de rigidité suivant, dû à Gérard Besson, Gilles Courtois et Sylvain Gallot :

**Théorème 4.10** ([BCG95]). *Soit  $(X, g_0)$ , et  $(Y, g)$  deux  $n$ -variétés fermées orientables de dimension  $n \geq 3$ , munies d'une application continue  $f : Y \rightarrow X$  de degré 1. On suppose que  $g_0$  est hyperbolique et que  $g$  satisfait  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ . Alors*

$$\text{vol}_g(Y) \geq \text{vol}_{g_0}(X), \tag{4.1}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $f$  est homotope à une isométrie.

Il découle du théorème (en faisant  $Y = X$ ) que la fonctionnelle volume sur  $X$  est minimisée uniquement par la métrique hyperbolique. A ma connaissance, il n'y a pas d'autre exemple de variété riemannienne réalisant cet infimum, y compris parmi les espaces localement symétriques. Notons qu'il y est facile de construire des variétés  $Y$  dominant  $X$ , autres que par équivalence d'homotopie : n'importe quelle somme connexe  $Y = X \# X'$ , où  $X'$  est une  $n$ -variété quelconque, convient.

Rappelons que ce phénomène de rigidité n'a pas lieu en dimension 2 car une surface de genre supérieur ou égal à 2 admet beaucoup de métriques hyperboliques de même volume (ce volume étant proportionnel à la caractéristique d'Euler par la formule de Gauss-Bonnet) non isométriques.

Observons que dans la situation du théorème 4.10, on obtient la rigidité sous l'hypothèse que sur  $Y$  l'infimum des volumes soit réalisé par une métrique  $g$ , et qu'il soit égal au volume de  $(X, g_0)$ . On peut se demander si une rigidité persiste lorsqu'on suppose que le volume de  $g$  est proche de  $\text{vol}_{g_0}(X)$  (toujours sous la condition  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ ). Précisément, si on ne suppose pas que  $g$  minimise la fonctionnelle, le fait d'être proche de l'infimum en volume suffit-il pour que  $(Y, g)$  ressemble à  $(X, g_0)$ , au point que  $Y$  et  $X$  soient difféomorphes? Nous verrons plus loin que c'est bien le cas, et qu'il y a donc rigidité différentielle. Disons tout de suite que l'approche variationnelle n'est d'aucune utilité pour la preuve, la condition de courbure étant difficile à manier sous cet aspect. Il nous faudra d'autres outils, en particulier les *applications naturelles* déjà utilisées dans 4.10.

Dans ma thèse, j'avais considéré une situation semblable mais sous des hypothèses de courbure plus fortes, en étudiant les propriétés de rigidité associées au *volume minimal*. Rappelons que M. Gromov [Gro82] définit sur une variété  $M$  cet invariant, noté  $\text{minvol}(M)$ , comme l'infimum des volumes des métriques riemanniennes sur  $M$  de courbure sectionnelle entre  $-1$  et  $1$ . On peut aussi le définir comme :

$$\begin{aligned} \text{minvol}(M) &= \inf \{ \text{vol}_g(M) \sup_{x \in M} |K_g(x)| \mid g \} \\ &= \inf \{ \sup_{x \in M} |K_g(x)| \mid g, \text{vol}_g(M) = 1 \} \end{aligned}$$

Chercher des métriques réalisant cet invariant revient donc à chercher les métriques de volume 1 de plus petite courbure, i.e. “les métriques les moins bosselées”. D’après le théorème 4.10, sur une variété hyperbolique  $(X, g_0)$ , il est réalisé uniquement par la métrique  $g_0$ . J’ai obtenu [Bes98] le résultat de rigidité différentielle suivant :

**Théorème 4.11.** *Soit  $(X, g_0)$ , et  $(Y, g)$  deux  $n$ -variétés fermées orientables de dimension  $n \geq 3$ , munies d’une application continue  $f : Y \mapsto X$  de degré 1. On suppose que  $g_0$  est hyperbolique. Alors  $\text{minvol}(Y) = \text{vol}_{g_0}(X)$  si et seulement si  $Y$  et  $X$  sont difféomorphes.*

La preuve combine la construction d’applications naturelles à la BCG et la théorie de convergence riemannienne “à la Gromov”. Cette idée a été reprise dans [BCS05] pour obtenir certains résultats de rigidité pour des variétés de volume fini (voir aussi [Bes00]).

Je reviens maintenant à la question posée plus haut : y a-t-il un phénomène de rigidité si on considère une métrique presque minimisant le volume sous l’hypothèse  $\text{Ric} \geq -(n-1)g$  ? Si oui, de quoi dépend le “presque” ? Avec les auteurs de 4.10, nous obtenons le résultat optimal suivant :

**Théorème 4.12** ([BBCG10]). *Pour tout entier  $n \geq 3$  et  $d > 0$ , il existe  $\varepsilon(n, d) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(X, g_0)$  une  $n$ -variété fermée orientable hyperbolique de diamètre  $\leq d$  et  $Y$  une  $n$ -variété fermée qui domine  $X$ . Alors  $Y$  admet une métrique  $g$  telle que*

$$\text{Ric}_g \geq -(n-1)g, \tag{4.2}$$

$$\text{vol}_g(Y) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}_{g_0}(X) \tag{4.3}$$

si et seulement si  $f$  est homotope à un difféomorphisme.

En particulier si  $Y$  n’est pas difféomorphe à  $X$ ,  $\text{vol}_g(Y) \geq (1 + \varepsilon) \text{vol}_{g_0}(X)$ . Autrement dit, entre le volume de  $X$  et le volume de toute variété  $Y$  autre que  $X$  qui la domine, il y a un saut. De plus, l’invariant défini comme l’infimum des volumes sous condition de courbure  $\text{Ric} \geq -(n-1)g$  est un invariant différentiable : il est sensible à la structure différentiable de la variété. En effet, en considérant les exemples construits par Farrell et Jones [FJ89] de variétés  $Y$  homéomorphes, mais non difféomorphes, à une variété hyperbolique donnée  $(X, g_0)$ , on donne de la substance au résultat suivant, corollaire immédiat de 4.12 :

**Corollaire 4.13.** *Soit  $(X^n, g_0)$  comme ci-dessus, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour toute variété  $Y^n$  homéomorphe, mais non difféomorphe, à  $X^n$ , et toute métrique riemannienne  $g$  sur  $Y$  telle que  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ , on ait*

$$\text{vol}_g(Y) \geq (1 + \varepsilon) \text{vol}_{g_0}(X).$$

Les théorèmes 4.10 et 4.12 se généralisent à la situation où l’application continue  $f : Y \rightarrow X$  est de degré non nul. Supposons que la courbure de Ricci de  $(Y, g)$  vérifie  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ , l’équation (4.1) est alors remplacée par

$$\text{vol}_g(Y) \geq |\deg(f)| \text{vol}_{g_0}(X),$$

et on a égalité si et seulement si  $f$  est homotope à un revêtement riemannien. L’équation (4.3) est remplacée par

$$\text{vol}_g(Y) \leq (1 + \varepsilon) |\deg(f)| \text{vol}_{g_0}(X).$$

Cette équation est alors vérifiée si et seulement si  $f$  est homotope à un revêtement différentiable. Appliquons cela avec  $Y = X \sharp X$ , la somme connexe de  $X$  avec elle-même. Cette variété n’admet



pas de métrique hyperbolique donc n'admet pas non plus de revêtement différentiable de degré 2 sur  $X$ , bien qu'il y ait une application  $f : Y \rightarrow X$  de degré 2. On obtient donc le corollaire suivant :

**Corollaire 4.14.** *Soit  $(X, g_0)$  une  $n$ -variété fermée orientable hyperbolique. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour toute métrique  $g$  sur  $X \sharp X$  telle que  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ , on a*

$$\text{vol}_g(X \sharp X) \geq 2(1 + \varepsilon) \text{vol}_{g_0}(X).$$

Pour conclure cette introduction, signalons que ce phénomène de rigidité n'est pas conservé si on considère les métriques à courbure scalaire minorées par  $-n(n-1)$ , au moins en dimension 3. En effet, si on définit, comme [BBB<sup>+</sup>10b],

$$\bar{V}(M) = \inf \{ \text{vol}_g(M) \mid R_g \geq -6 \},$$

on peut montrer [KL08b, section 93] [And06] que pour une 3-variété compacte  $M$ , on a  $\bar{V}(M) = \text{vol}_{-1}(H)$ , où  $H$  est la partie hyperbolique apparaissant dans la décomposition géométrique de la variété. En particulier si on considère  $M = X \sharp X$ , où  $(X, g_0)$  est hyperbolique, on a  $\bar{V}(M) = 2 \text{vol}_{g_0}(X)$ .

#### 4.4 Applications naturelles

Les preuves des théorèmes 4.10 et 4.12 recourent de manière essentielle à la notion d'application naturelle, que nous expliquons dans cette section. La première construction remonte à Douady-Earle [DE86]. Il s'agissait d'étendre de manière conforme un homéomorphisme du cercle  $S^1$  en un homéomorphisme du disque  $D$ . Pour cela, à  $y \in D$ , on associe d'abord une mesure  $\eta_y$  sur  $S^1$ , qu'on pousse par l'homéomorphisme donné en une mesure  $\phi_*\eta_y$  (toujours sur  $S^1$ ), qu'un barycentre envoie finalement sur un point de  $D$ , définissant l'application naturelle  $\Phi : D \mapsto D$  par  $\Phi(y) := \text{bar}(\phi_*\eta_y) \in D$ .

Dans le contexte du théorème 4.10, les auteurs construisent une famille d'applications naturelles entre les revêtements universels  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{X}$ , de manière  $f_*$ -équivariante sous l'action des groupes fondamentaux de  $Y$  et de  $X$ . Notons  $h(g)$  l'entropie volumique de la métrique  $g$ , définie par

$$h(g) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \ln(\text{vol}_{\tilde{g}} B_{\tilde{g}}(y, R))$$

où  $B_{\tilde{g}}(y, R)$  désigne une boule de rayon  $R$  dans le revêtement universel  $\tilde{Y}$  muni de la métrique relevée  $\tilde{g}$ . Pour chaque  $c > h(g)$ , on définit une application  $\tilde{F}_c : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  comme suit. A chaque  $y \in \tilde{Y}$ , on associe la mesure  $\eta_y^c$ , de densité  $e^{-cd(y,z)}$  au point  $z$  par rapport à la forme volume de  $\tilde{g}$  ( $\eta_y^c$  est de masse totale finie par choix de  $c$ ), où  $d$  est la distance associée à  $\tilde{g}$ , qu'on pousse par  $f_*$  en une mesure  $\beta_y^c = f_*\eta_y^c$  sur  $\tilde{X}$ . La convolution de  $\beta_y^c$  avec les mesures visuelles de  $\tilde{X}$  donne une mesure  $m_y^c$  sur  $\partial X$ , que le barycentre renvoie finalement sur un point de  $\tilde{X}$ , soit  $\tilde{F}_c(y) := \text{bar}(m_y^c) \in \tilde{X}$ . La construction étant équivariante, le passage au quotient définit alors  $F_c : Y \rightarrow X$ .

Cette application a des propriétés remarquables de rigidité infinitésimale. Elle est de classe  $C^1$ , est homotope à  $f$ , et satisfait pour tout  $y \in Y$ , l'inégalité

$$|\text{Jac } F_c(y)| \leq \left( \frac{c}{h(g_0)} \right)^n, \quad (4.4)$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si  $d_y F_c$  est une homothétie entre les espaces tangents  $T_y Y$  et  $T_{F_c(y)} X$ . Notons que par intégration, et en faisant tendre  $c$  vers  $h(g)$ , on obtient une autre inégalité donnant lieu à un phénomène de rigidité :

$$\text{vol}_{g_0}(X) \leq \left( \frac{h(g)}{h(g_0)} \right)^n \text{vol}_g(Y) \quad (4.5)$$

Puisque d'après l'inégalité de Bishop [GHL90, th. 3.101], on a  $h(g) \leq h(g_0)$ , on obtient ainsi l'inégalité (4.1). Lorsque  $c$  est proche de  $h(g_0)$ , (4.4) signifie que  $F_c$  est presque "volume-décroissante", i.e.  $\text{vol}_{g_0}(F_c(A)) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}_g(A)$  pour tout ensemble mesurable  $A \subset Y$ . En cas d'égalité des volumes globaux  $\text{vol}_g(Y) = \text{vol}_{g_0}(X)$ , on obtient presque égalité dans (4.4), sur une partie de  $Y$  dont le volume est presque maximal. Sur cette partie, la différentielle  $dF$  est alors presque isométrique. En combinant ceci avec un contrôle global de  $dF$  sur  $Y$ , la preuve du théorème 4.10 s'obtient en montrant que lorsque  $c \rightarrow h(g) = h(g_0)$ ,  $F_c$  converge vers une application  $F : (Y, g) \rightarrow (X_{g_0})$ , qui réalise alors l'isométrie.

Dans le contexte du théorème 4.12 (et aussi de 4.11), on n'a pas *a priori* de métrique  $g$  sur  $Y$  réalisant l'égalité des volumes avec  $\text{vol}_{g_0}(X)$ , et on ne voit pas comment déduire d'une presque égalité des volumes qu'une des applications  $F_c$  serait un difféomorphisme. L'idée est alors de raisonner par contradiction, en considérant une suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , des variétés  $Y_k, X_k$  et des applications  $f_k : Y_k \rightarrow X_k$  de degré 1 satisfaisant les hypothèses, où  $\varepsilon$  est remplacé par  $\varepsilon_k$  dans l'équation (4.3), mais telles que  $f_k$  n'est pas homotope à un difféomorphisme. Pour conclure, il suffit de trouver des variétés  $X_k$  et  $Y_k$  difféomorphes, l'application  $f_k$  étant alors nécessairement homotope au difféomorphisme. On peut facilement se ramener au cas où la variété hyperbolique est fixée, notons la  $X$ . La stratégie est de construire, pour chaque entier  $k$ , une famille d'applications naturelles  $F_{c,k} : Y_k \rightarrow X$ , où  $c > h(g_k)$ , puis de faire sous-converger simultanément les variétés riemanniennes  $Y_k$  vers un espace-limite  $Y_\infty$ , et les applications naturelles (en utilisant un procédé diagonal) vers une application limite  $F_\infty : Y_\infty \rightarrow X$ . La convergence utilisée est assez grossière, puisqu'on ne dispose comme contrôle de courbure sur les  $g_k$  que d'une borne inférieure de la courbure de Ricci, c'est celle de la *topologie de Gromov-Hausdorff (pointée)* que nous définissons dans la section suivante. Le but est de montrer que  $F_\infty$  est un isométrie, ce qui impliquera que  $Y_k$  converge pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers  $X$ . On pourra alors conclure grâce au théorème suivant [CC97, th. A.1.12] :

**Théorème 4.15.** *Soit  $(Y_k)$  une suite de  $n$ -variétés riemanniennes compactes de courbure de Ricci uniformément minorée, convergeant pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers une variété riemannienne compacte  $X$  de même dimension. Alors  $Y_k$  et  $X$  sont difféomorphes pour tout  $k$  assez grand.*

Dans la section suivante, nous détaillons quelques arguments de la preuve ébauchée ci-dessus, en introduisant les notions et les résultats utiles.

## 4.5 Limites d'espaces à courbure de Ricci minorée

On se donne donc une suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , des variétés  $Y_k, X_k$  et des applications  $f_k : Y_k \rightarrow X_k$  de degré 1 satisfaisant les hypothèses du théorème 4.12, où  $\varepsilon$  est remplacé par  $\varepsilon_k$  dans l'équation (4.3), mais telles que  $f_k$  n'est pas homotope à un difféomorphisme. On commence par fixer la variété hyperbolique. Cela découle du théorème de finitude de Cheeger [Che70] (voir page

27) et du théorème de Mostow énoncé au début (théorème 4.8). Le coeur du théorème de finitude est l'obtention d'une borne inférieure sur le rayon d'injectivité, rayon en dessous duquel une boule métrique est difféomorphe à une boule standard (donc sans topologie), en termes des bornes de courbure, diamètre et volume données. C'est le précurseur des théorèmes de convergence riemannienne "à la Gromov" dont on parlera dans un instant. Les variétés hyperboliques de dimension donnée ayant un volume uniformément minoré, celles que nous considérons satisfont les hypothèses du théorème de finitude, donc ne comptent qu'un nombre fini de types de difféomorphismes. Le théorème de Mostow dit alors que deux variétés hyperboliques difféomorphes sont en fait isométriques. Quitte à prendre une sous-suite et à composer les  $f_k$  par des isométries, on peut donc supposer que  $X_k = X$  est une variété hyperbolique fixée.

La suite des  $Y_k$  est beaucoup moins rigide puisqu'elle ne satisfait qu'une borne inférieure sur la courbure de Ricci, et n'est pas majorée en diamètre. Le volume des  $Y_k$  est minoré par celui de  $X$ , d'après l'inégalité (4.1). Cependant, le diamètre n'étant pas majoré, on ne peut *a priori* pas déduire de la minoration du volume des  $Y_k$  une minoration uniforme du volume des boules de rayon fixé (par exemple  $\varepsilon S^2 \times \varepsilon^{-2} S^1$ , avec la notation évidente, est de volume fixe quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mais le volume des boules-unité tend vers 0). Une telle minoration est pourtant nécessaire si on veut avoir une convergence raisonnable vers un espace de même dimension, comme on l'expliquera plus bas. Nous verrons que c'est l'existence d'une application de degré 1 vers  $X$  qui va nous donner un contrôle de ce type, via le volume simplicial.

La simple hypothèse de courbure de Ricci uniformément minorée permet d'appliquer le théorème de précompacité de Gromov [Gro99, Prop. 5.2]. Avant de l'énoncer, introduisons quelques définitions. Soit  $(E, d)$  et  $(E', d')$  deux espaces métriques, et  $\alpha > 0$ , on appelle  $\alpha$ -*approximation de Hausdorff* une application  $\phi : (E, d) \rightarrow (E', d')$  qui satisfait les deux assertions suivantes :

- (1) Pour tout  $x_1, x_2 \in E$ ,  $|d'(\phi(x_1), \phi(x_2)) - d(x_1, x_2)| < \alpha$ ,
- (2) Le  $\alpha$ -voisinage de  $\phi(E)$  est égal à  $E'$ .

Une suite d'espaces métriques  $(E_k, d_k)$  converge pour la *topologie de Gromov-Hausdorff* (qu'on note aussi *topologie G-H*) vers un espace métrique  $(E_\infty, d_\infty)$  s'il existe des  $\alpha_k$ -approximations de Hausdorff de  $(E_k, d_k)$  sur  $(E_\infty, d_\infty)$  avec  $\alpha_k \rightarrow 0$ . Une suite d'espaces métriques pointés  $(E_k, d_k, x_k)$  converge pour la *topologie G-H pointée* vers un espace métrique pointé  $(E_\infty, d_\infty, x_\infty)$  si pour tout  $R > 0$ , les boules  $B(x_k, R)$  convergent G-H vers  $B(x_\infty, R)$ .

C'est une convergence extrêmement grossière, car les approximations de Hausdorff ne sont pas supposées continues. Par exemple  $\frac{1}{k}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  pour la topologie G-H. Elle est pour cette raison très robuste. Le théorème de précompacité de Gromov affirme que *de toute suite de  $n$ -variétés riemanniennes complètes pointées  $(Y_k, y_k)$ , de courbure de Ricci uniformément minorée, on peut extraire une sous-suite, convergeant pour la topologie G-H pointée, vers un espace métrique de longueur complet*. Le coeur de l'argument est le suivant. Il découle de l'inégalité de Bishop-Gromov que dans une  $n$ -variété riemannienne satisfaisant la minoration  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)g$ , pour tout  $R, \varepsilon > 0$  une boule métrique  $B(p, R)$  contient toujours un ensemble  $\varepsilon$ -dense (i.e. dont le  $\varepsilon$ -voisinage contient  $B(p, R)$ )  $A_{\varepsilon, R}$  ayant moins de  $C(n, R, \varepsilon)$  éléments. Si on veut savoir à quoi ressemble la boule, à  $\varepsilon$ -près, il suffit de connaître les distances relatives entre points de  $A_{\varepsilon/3, R}$ , à  $\varepsilon/3$ -près. Le nombre de configurations possibles est clairement borné par  $C(n, R, \varepsilon)^2 (\frac{3R}{\varepsilon})$ . Etant donnée une suite de variétés,  $\varepsilon, R$  étant fixés, on peut quitte à extraire fixer une configuration. Le théorème de pré-compacité s'obtient en combinant ceci à un procédé diagonal lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Notons que, appliquée à une classe d'espaces métriques satisfaisant une estimée du type  $|A_{\varepsilon, R}| \leq C(\varepsilon, R)$ , l'argumentation ci-dessus conduit à un théorème de compacité.

La structure des espaces-limites à courbure de Ricci minorée est aujourd'hui bien décrite par la

théorie de Cheeger-Colding [CC97][CC00a][CC00b]. En particulier, en cas de *non-effondrement* l'espace-limite ressemble beaucoup à une variété. Dans le cadre de cette théorie, il y a non-effondrement si le volume des boules-unités centrées au point-base de la suite considérée est uniformément minoré, i.e.  $\text{vol} B(y_k, 1) \geq v > 0$  où  $v$  est indépendant de  $k$ . C'est précisément le cas de notre suite  $Y_k$ , si on choisit correctement les points-bases. Cette propriété des  $Y_k$  est héritée de  $X$  via l'application de degré 1 et le volume simplicial. En effet, l'existence d'une application de degré 1  $f_k : Y_k \rightarrow X$  implique que  $\|Y_k\| \geq \|X\|$ ; puisque  $X$  est hyperbolique,  $\|X\| > 0$  d'après le théorème de Gromov-Thurston, donc  $\|Y_k\|$  également. Cette information topologique est convertie en information géométrique grâce au théorème d'isolation de Gromov [Gro82, Th. 0.5] :

**Théorème 4.16.** *Soit  $V$  une  $n$ -variété complète telle que  $\text{Ric} \geq -(n-1)$ , et telle que toute boule unité  $B(v, 1)$ , pour  $v \in V$ , satisfait  $\text{vol} B(v, 1) \leq \varepsilon$  pour  $\varepsilon = \varepsilon(n)$ . Alors  $\|V\| = 0$ .*

On déduit donc de  $\|Y_k\| > 0$  qu'il existe  $y_k \in Y_k$  tel que  $\text{vol}_{g_k} B(y_k, 1) \geq \varepsilon(n)$ . Dorénavant on choisit ces points comme points-base de la suite. Notons que par le théorème de comparaison de Bishop-Gromov, ceci fournit une borne inférieure du volume de toute boule-unité qui ne dépend que de la distance de son centre au point-base. En effet, si  $v_{-1}^n(r)$  désigne le volume d'une  $r$ -boule dans l'espace hyperbolique de dimension  $n$ , alors

$$\text{vol} B(y, 1) \geq \text{vol} B(y, 1 + d(y_k, y)) \frac{v_{-1}^n(1)}{v_{-1}^n(1 + d(y_k, y))} \geq \varepsilon(n) \frac{v_{-1}^n(1)}{v_{-1}^n(1 + d(y_k, y))},$$

puisque  $B(y_k, 1) \subset B(y, 1 + d(y_k, y))$ .

Dans cette situation de non-effondrement, l'espace-limite  $(Y_\infty, d_\infty, y_\infty)$  va ressembler à une variété de dimension  $n$ . On peut en avoir l'intuition par le raisonnement suivant. Si les boules  $B(y_k, R)$  ont un volume uniformément minoré, les ensembles  $\varepsilon$ -denses  $A_{\varepsilon, R, k} \subset B(y_k, R)$  seront aussi de cardinal uniformément minoré, et de plus comparable à celui d'une boule euclidienne, i.e. de l'ordre de  $(\frac{R}{\varepsilon})^n$ . Cette minoration passant à l'espace-limite, les boules de l'espace-limite ressembleront à des boules euclidiennes, à  $\varepsilon$ -près. Soyons maintenant plus précis, en terme de comportement de volume des boules et d'espace tangent. Tout d'abord il y a convergence, pour la topologie G-H pointée, du volume riemannien vers la  $n$ -mesure de Hausdorff de l'espace-limite [CC97] : si  $p_k \in Y_k$  converge G-H vers  $p_\infty \in Y_\infty$  alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol} B(p_k, r) = \mathcal{H}^n(B(p_\infty, r))$$

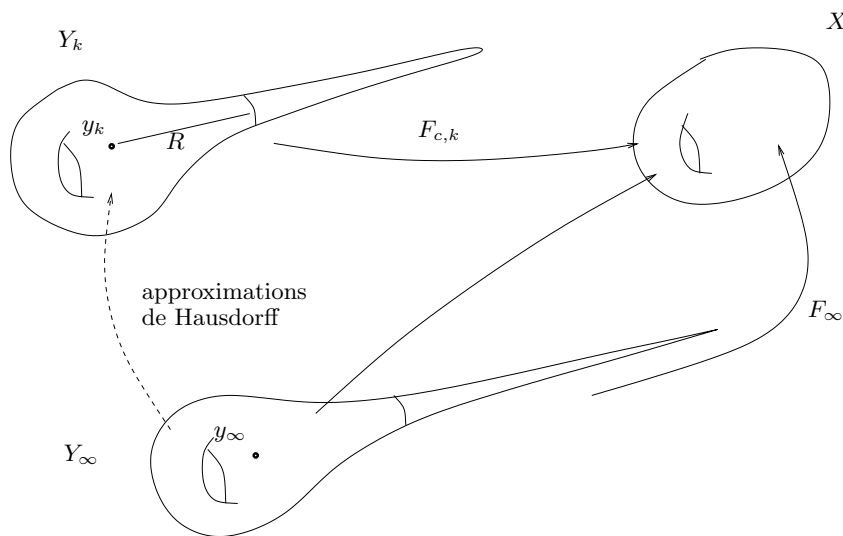
où  $\mathcal{H}^n$  est la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle de  $(Y_\infty, d_\infty)$ . Les boules de l'espace limite sont donc de  $\mathcal{H}^n$ -mesure strictement positive, minorée en fonction de la distance au point-base  $y_\infty$ . Il s'ensuit que les inégalités de Bishop et de Bishop-Gromov sont satisfaites également sur  $Y_\infty$ . Ceci implique, via le théorème de compacité de Gromov (version espaces métriques), que chaque point  $p \in Y_\infty$  admet un *cône tangent*  $Y_{\infty, p}$ . Par définition,  $Y_{\infty, p}$  est la limite G-H pointée d'une suite de renormalisations  $(Y_\infty, r_i^{-1} d_\infty, p)$  où  $\{r_i\}$  est une suite de réels  $> 0$  telle que  $r_i \rightarrow 0$  (la limite peut dépendre de la suite choisie). Si on note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des points  $p \in Y_\infty$  dont tous les cônes tangents sont isométriques à  $\mathbb{R}^n$ , et  $\mathcal{S} = Y_\infty \setminus \mathcal{R}$  son complémentaire (points *réguliers* et points *singuliers*), alors  $\mathcal{H}^{n-2}(\mathcal{S}) = 0$  ([CC97, Th 6.1]). Pour  $\varepsilon > 0$ , notons  $\mathcal{R}_\varepsilon$  l'ensemble des points  $p \in Y_\infty$  tel que pour tout cône tangent  $Y_{\infty, p}$  en  $p$ , la boule-unité centrée en  $p$  de  $Y_{\infty, p}$  est  $\varepsilon$ -hausdorff proche de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  (points  $\varepsilon$ -réguliers). Alors, pour  $\varepsilon < \varepsilon(n)$  ( $\varepsilon(n)$  ici n'a rien à voir avec celui du théorème 4.16),  $\mathcal{R}_\varepsilon$  a une structure de  $n$ -variété [CC97, Th 5.14] et est connexe par arcs [CC00a, section 3]. Les points  $\varepsilon$ -réguliers peuvent être caractérisés par le

comportement asymptotique de  $\mathcal{H}^n(B(p, r))$  lorsque  $r \rightarrow 0$ , ce qui est plus adapté à nos besoins. Précisément, posons

$$\theta(p) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(B(p, r))}{\text{vol}_{\mathbb{R}^n}(r)}.$$

D'après l'inégalité de Bishop,  $\theta \in [0, 1]$ . Une conséquence de [CC97, A.1.5] est l'existence d'une fonction  $\tau(\varepsilon) > 0$ , avec  $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , telle que pour tout  $p \in \mathcal{R}_\varepsilon$ ,  $\theta(p) > 1 - \tau(\varepsilon)$ . Inversement il existe  $\varepsilon(\tau) > 0$ , satisfaisant  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  quand  $\tau \rightarrow 0$ , telle que  $\theta(p) \geq 1 - \tau$  implique  $p \in \mathcal{R}_{\varepsilon(\tau)}$ .

Avec ces outils en main, la preuve du théorème 4.12 se déroule comme suit. Pour une suite  $c_k > h(g_k)$  bien choisie, on extrait une application-limite  $F_\infty : Y_\infty \rightarrow X$ , de la composée des  $F_{c_k, k} : Y_k \rightarrow X$  et des approximations de Hausdorff entre les boules  $B(y_\infty, R)$  et  $B(y_k, R)$  pour  $R \rightarrow \infty$ . On montre ensuite que cette application-limite  $F_\infty$  est une isométrie.



Les étapes principales sont les suivantes. Puisque  $\text{vol}_{g_k}(Y_k) \rightarrow \text{vol}_{g_0}(X)$  et  $h(g_k) \leq h(g_0)$ , l'égalité est presque réalisée dans l'équation (4.5) et  $h(g_k) \rightarrow h(g_0)$ . L'égalité est également presque réalisée dans l'équation (4.4) sur des ensembles  $\Omega_k \subset Y_k$  de volume presque maximal.

(1) On obtient d'abord un contrôle optimal de la différentielle  $dF_{c,k}$  dans un voisinage de  $\Omega_k$ , voisinage qui contient toute boule  $B(y_k, R)$  de rayon fixé pour  $k$  assez grand ([BBCG10, lemme 3.12]).

(2) On utilise un lemme de géométrie intégrale [CC96, Th 2.11], pour montrer qu'étant donné deux points quelconques  $a$  et  $b$  de  $B(y_k, R)$ , on peut trouver une géodésique dont les extrémités sont proches de  $a$  et de  $b$ , et dont l'intersection avec  $\Omega_k$  est presque maximale (quand  $k \rightarrow \infty$ ). La longueur de la géodésique est alors presque préservée quand on prend son image par  $F_{c,k}$  puisque  $dF_{c,k}$  est presque isométrique sur la presque totalité de la géodésique (et uniformément bornée aux autres points, [BBCG10, lemme 3.13]).

(3) Des étapes précédentes, on déduit l'existence d'une application limite  $F_\infty = Y_\infty \rightarrow X$ , qui est 1-lipschitz ([BBCG10, section 4]).

(4) En considérant des parties de volume presque maximal où  $|\text{Jac } F_{c,k}|$  est presque égal à 1, on montre que  $F_\infty$  préserve les volumes, c'est-à-dire que, pour tout ensemble mesurable  $A \subset Y_\infty$ ,

$\text{vol}_{g_0}(F_\infty(A)) = \mathcal{H}^n(A)$  ([BBCG10, lemme 5.1]).

(5) On montre, en considérant de petites boules disjointes dans l'ensemble  $\mathcal{R}_\varepsilon$ , dont la  $\mathcal{H}^n$ -mesure est presque euclidienne, que les images par  $F_\infty$  de telles boules ne peuvent pas trop s'intersecter (en contrôlant la perte de volume), donc que les images de leurs centres ne peuvent pas trop se rapprocher. On en déduit que  $F_\infty$  est injective sur  $\mathcal{R}_\varepsilon$  (lemme 5.2), puis, en utilisant la théorie du degré local, qu'elle est ouverte sur  $\overset{\circ}{\mathcal{R}}_\varepsilon$  ([BBCG10, lemme 5.3]).

(6) On montre que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $F_\infty : \overset{\circ}{\mathcal{R}}_\varepsilon \rightarrow F_\infty(\overset{\circ}{\mathcal{R}}_\varepsilon)$  est une application  $(1 + c(\varepsilon))$ -bilipschitz, avec  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ici,  $F_\infty(\overset{\circ}{\mathcal{R}}_\varepsilon)$  est munie de la distance induite par  $g_0$ .

(7) On montre que sur  $F_\infty(\overset{\circ}{\mathcal{R}}_\varepsilon)$ , la distance induite coïncide avec la distance ambiante  $d_{g_0}$ , puis dans une dernière étape que  $F_\infty(Y_\infty) = X$  et que  $F_\infty$  est une isométrie ([BBCG10, prop. 5.6]). En particulier  $Y_\infty$  est compact et la convergence G-H pointée de  $Y_k$  vers  $Y_\infty$  est une convergence G-H. Ceci montre que  $Y_k$  converge G-H vers  $X$ .

On conclut avec le théorème 4.15.

Il va de soi que tous les "presque" qui apparaissent ci-dessus doivent être quantifiés, et que si les idées ne sont pas conceptuellement ardues, leur mise en oeuvre demande du travail.

## Troisième partie

# Questions sur les points critiques de la fonctionnelle de Hilbert-Einstein

Dans cette partie, je décris quelques questions concernant les points critiques de la fonctionnelle de Hilbert-Einstein, et une tentative, encore infructueuse, d'attaque d'une de ces questions. On supposera les variétés compactes, connexes et orientables.

## 5.6 Questions

Une manière de répondre à la question posée dans l'avant-propos est l'approche variationnelle : pour définir une métrique canonique sur une variété donnée, on considère une fonctionnelle sur l'espace des métriques sur la variété, et on étudie ses extremas, ou plus généralement ses points critiques. Une fonctionnelle très étudiée est la *courbure scalaire totale*, dite aussi *fonctionnelle de Hilbert-Einstein*. J'en rappelle la définition et quelques propriétés bien connues (voir [Bes87, section 4] pour plus). Soit donc  $M$  une  $n$ -variété compacte, et  $\mathcal{M}$  l'ensemble des métriques riemanniennes  $g$  sur  $M$ . On définit  $\mathcal{S} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g dv_g,$$

où  $R_g$  est la courbure scalaire de  $g$ . Cette fonctionnelle étant sensible aux homothéties quand  $n \geq 3$ , on la restreint souvent au sous-espace  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$  des métriques de volume 1, ou bien on

la normalise en considérant la fonctionnelle homogène  $\frac{\mathcal{S}(g)}{\text{vol}_g(M)^{\frac{n-2}{n}}}$ . L'espace des métriques  $\mathcal{M}$  a une structure différentiable et son espace tangent en un point est l'espace des formes bilinéaires symétriques sur la variété, qu'on note  $S^2(M)$ . Lorsque  $S^2(M)$  est identifié à l'espace tangent  $T_g\mathcal{M}$ , on le munit du produit scalaire  $L^2$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ , induit par  $g$ . La fonction  $\mathcal{S}$  est alors différentiable sur  $\mathcal{M}$  et sa différentielle en un point  $g \in \mathcal{M}$ , dans la direction  $h \in S^2(M)$  est donnée par

$$\mathcal{S}'(g).h := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{S}(g + th) = \left\langle \frac{R_g}{2}g - \text{Ric}_g, h \right\rangle_g.$$

On identifie alors  $\frac{R_g}{2}g - \text{Ric}_g$  avec le gradient de la fonctionnelle, noté  $\nabla\mathcal{S}(g)$ . En dimension  $\geq 3$ , les seuls points critiques sont donc les métriques Einstein plates, i.e. satisfaisant  $\text{Ric}_g = 0$ . Si on restreint  $\mathcal{S}$  à  $\mathcal{M}_1$ , son gradient en  $g$  s'obtient en projetant  $\nabla\mathcal{S}(g)$  orthogonalement sur  $T_g\mathcal{M}_1 = \{h \in S^2(M) | \langle h, g \rangle_g = 0\}$ , ce qui donne  $\nabla\mathcal{S}_{\mathcal{M}_1}(g) = (\int_M R_g dv_g) \frac{g}{n} - \text{Ric}_g$ . En dimension supérieure où égale à 3, l'identité différentielle de Bianchi implique que les points critiques satisfont alors  $\text{Ric}_g = \frac{R_g}{n}g$  : ce sont les métriques d'Einstein. Sur une variété quelconque c'est une contrainte beaucoup trop forte.

Pour obtenir plus de points critiques, on restreint la fonctionnelle à un espace plus petit, l'ensemble  $[g] \cap \mathcal{M}_1$  des métriques de volume 1 *conformément équivalentes* à  $g$ . Rappelons que  $\tilde{g}$  est conformément équivalente à  $g$  s'il existe une fonction  $u$  sur  $M$  telle que  $\tilde{g} = e^u g$ . On note  $[g]$  la classe conforme de  $g$ , et  $[g]_1 = [g] \cap \mathcal{M}_1$ . Il est facile de voir que les points critiques de  $\mathcal{S}$  restreinte à  $[g]_1$  sont exactement les métriques de courbure scalaire constante. La question de savoir si une classe conforme donnée contient au moins un point critique, plus précisément un minimum, est en revanche une question très difficile, connue sous le nom de *problème de Yamabe*, dont la résolution (positive) a occupé les années 60-80. Une métrique  $g$  qui minimise  $\mathcal{S}$  dans  $[g]_1$  est appelée *métrique de Yamabe*. Une telle métrique est donc de courbure scalaire constante, et la valeur de sa courbure scalaire est appelée *invariant de Yamabe* et noté  $\mu([g])$ . Notons qu'un point critique de  $\mathcal{S}$  restreinte à  $[g]_1$  n'est pas nécessairement une métrique de Yamabe. Par ailleurs, tout invariant de Yamabe est majoré par celui de la sphère standard [Aub76] :  $\mu([g]) \leq \mu(S^n, \text{can})$  pour toute métrique  $g$  sur  $M$ . Ceci conduit à définir un invariant sur la variété, appelé invariant  $\sigma$  ou constante  $\sigma$ , en prenant la supremum des invariants de Yamabe lorsque  $g$  parcourt  $\mathcal{M}$  :

$$\sigma(M) := \sup_{g \in \mathcal{M}} \mu([g]).$$

R. Schoen a conjecturé [Sch89, p 126-127] qu'une métrique qui réalise  $\sigma(M)$  est d'Einstein, et que si  $M$  admet une métrique de courbure sectionnelle constante, celle-ci est la seule à réaliser l'invariant. La première conjecture est vérifiée si  $\sigma(M) \leq 0$ , et la seconde sur  $S^n$  et les variétés plates. En dehors de ces cas, on sait très peu de choses. L'invariant  $\sigma$  est connu sur  $S^1 \times S^{n-1}$  [Sch89],[Kob87] : on a  $\sigma(S^n) = \sigma(S^1 \times S^{n-1})$  et il n'est pas réalisé par une métrique.

En dimension 3, on comprend mieux ce qui se passe grâce aux travaux de Perelman. On a la classification suivante [KL08b, section 93] [And06] résolvant des conjectures de M. Anderson [And] :

- $\sigma(M) > 0$  si et seulement si  $M$  est une somme connexe de  $S^1 \times S^2$  et de variétés sphériques,
- $\sigma(M) \geq 0$  si et seulement  $M$  est graphée,
- si  $\sigma(M) < 0$ ,  $\sigma(M) = -6(\text{vol}_{-1}(H))^{2/3}$ , où  $H$  est la partie hyperbolique apparaissant dans la décomposition géométrique de  $M$ .

En particulier, si  $M$  est hyperbolique,  $\sigma(M)$  est réalisé par la métrique hyperbolique seulement. De manière surprenante, dans le cas des variétés sphériques cela ne permet pas de résoudre la conjecture de Schoen. Le seul cas connu est  $RP^3$ , par des méthodes complètement différentes [BN04]. De manière générale, l'étude de  $\sigma(M)$  dans le cas  $> 0$  semble très difficile.

Considérons le point de vue variationnel. Dans le cas  $\sigma(M) \leq 0$ , il fonctionne bien car il y a unicité de la métrique de Yamabe de volume 1 dans  $[g_1]$ . L'espace  $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{M}_1$  des métriques de Yamabe a alors une structure de variété, et les points critiques de  $\mathcal{S}$  restreinte à  $\mathcal{Y}_1$  sont bien les métriques d'Einstein. Dans le cas d'une classe conforme  $[g]$  telle que  $\mu([g]) > 0$ , il n'y a pas unicité en général des métriques de Yamabe. Le cas le plus extrême est celui de la sphère : si  $g_0$  est la métrique ronde de volume 1 sur  $S^n$ , pour toute transformation conforme  $F : S^n \rightarrow S^n$ ,  $F^*g_0 \in [g_0]_1$  est une autre métrique de Yamabe dans la même classe conforme. La régularité de  $\mathcal{Y}_1$  et la différentiabilité de  $\mathcal{S} : \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  sont donc problématiques en des points d'invariant de Yamabe positif (voir [And05] pour des réponses partielles).

Une idée est d'essayer de comprendre ce qui se passe dans l'espace juste au dessus de  $\mathcal{Y}$ , l'espace des métriques de courbure scalaire constante, dont on connaît mieux la structure. Notons  $\mathcal{C}$  cet espace et  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_1$ . On a donc  $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{M}_1$  et en général,  $\mathcal{C}_1$  est strictement plus gros que  $\mathcal{Y}_1$ . Génériquement<sup>13</sup>,  $\mathcal{C}_1$  a une structure de variété de dimension infinie [Koi79], d'espace tangent

$$T_g\mathcal{C}_1 = \{h \in T_g\mathcal{M}_1 \mid \alpha_g(h) = 0\}, \quad (5.6)$$

où  $\alpha_g : S^2(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  est l'opérateur défini par  $g \mapsto \Delta_g R'(g).h$  (le Laplacien que l'on considère maintenant est celui des géomètres, i.e. l'opposé de la trace du Hessien). Notons que  $T_g\mathcal{C}_1$  peut toujours être défini par (5.6), même si  $\mathcal{C}_1$  n'est pas une variété en  $g$ , et on peut donc le voir comme l'espace tangent formel de  $\mathcal{C}_1$ . On peut se demander quels sont les *points critiques formels* de  $\mathcal{S}$  restreinte à  $\mathcal{C}_1$  :

**Définition 5.17.** Une métrique  $g \in \mathcal{C}_1$  est un *point critique formel* de  $\mathcal{S}$  restreinte à  $\mathcal{C}_1$  si  $S'(g).h = 0$  pour tout  $h \in T_g\mathcal{C}_1$ .

Le gradient de  $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_1}$  étant égal à  $-Z_g \in T_g\mathcal{M}_1$ , ceci équivaut à ce que  $Z_g \perp \ker(\alpha_g)$ . La théorie elliptique permettant décrire  $T_g\mathcal{M}_1 = (\ker(\alpha_g) \cap T_g\mathcal{M}_1) \oplus \text{Im}(\alpha_g^*)$ , où  $\alpha_g^* : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow S^2(M)$  est l'adjoint de  $\alpha_g$ , cela est aussi équivalent à ce que  $Z_g \in \text{Im}(\alpha_g^*)$ . Le calcul de  $\alpha_g^*(f)$  donne l'équation suivante,

$$Z_g = D_g df + \Delta_g f g - f \text{Ric}_g \quad (5.7)$$

pour une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Cette équation caractérise donc les points critiques formels de  $\mathcal{S}$  restreinte à  $\mathcal{C}_1$ .

Faisons quelques remarques sur cette équation, où on suppose que  $R_g > 0$ . Si  $f$  est constante, on a  $(1 + f) \text{Ric}_g = \frac{R_g}{n} g$ , donc  $f = 0$  et  $g$  est une métrique d'Einstein. Supposons que (5.7) admette une solution  $f$  non constante. Le seul exemple connu d'une telle situation est lorsque  $g$  est une métrique d'Einstein. Dans ce cas, l'équation (5.7) se réduit à  $Ddf = -\frac{R_g}{n(n-1)} fg$ , et le théorème d'Obata [Oba62] (voir aussi [BGM71]) montre qu'en fait  $(M, g)$  est isométrique à la sphère standard. Cette équation est donc très forte. Il a été conjecturé [Bes87, Rem 4.48] que la sphère standard est la seule solution non triviale de (5.7).

**Conjecture 5.18.** Soit  $(M, g)$  une variété compacte telle que  $R_g > 0$  et l'équation (5.7) admette une solution non identiquement nulle. Alors  $(M, g)$  est isométrique à la sphère standard.

<sup>13</sup>Précisément, si  $\frac{R_g}{n-1}$  n'est pas dans le spectre positif du Laplacien, où le Laplacien est celui des géomètres. Mais c'est justement le cas  $\frac{R_g}{n-1} \in \text{Sp}_+(\Delta)$  qui est intéressant....



Observons qu'en prenant la trace de (5.7) on obtient

$$\Delta_g f = \frac{R_g}{n-1} f, \quad (5.8)$$

c'est-à-dire que  $\frac{R_g}{n-1}$  est une valeur propre<sup>14</sup> de  $\Delta_g$ . C'est précisément la situation où l'espace tangent à  $\mathcal{C}_1$  est formel. On peut se demander si une métrique réalisant l'invariant  $\sigma$  est un point critique formel de  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_1}$ . L'exemple de  $RP^3$ , où on sait que  $\sigma$  est réalisé par la métrique ronde, montre que non : on a vu que (5.7) se réduit dans ce cas à  $Ddf = -\frac{R_g}{n(n-1)}fg$  et que la variété doit être isométrique à la sphère.

Dans la section suivante je décris une tentative, toujours infructueuse, d'aborder la conjecture dans le cas  $n = 3$ .

## 5.7 Une tentative

J'ai abordé la conjecture 5.18 avec L. Rozoy (Grenoble) et J. Lafontaine (Montpellier), qui l'étudiaient en lien avec une question similaire, la classification des solutions non triviales de l'équation  $\alpha_g^*(f) = 0$ . Cette équation a une interprétation en termes de relativité générale, et l'idée était de transporter certaines techniques relativistes dans notre cadre riemannien.

J. Lafontaine [Laf83] résoud les conjectures ci-dessus dans le cas où la variété est supposée conformément plate. L'idée de départ est donc de montrer que la métrique est conformément plate. Pour ce faire on raisonne par contradiction. En dimension 3, le fait pour une métrique d'être conformément plate est caractérisée par l'annulation du *tenseur de Cotton*, un 2-tenseur symétrique à trace nulle qu'on définit comme suit. Soit  $S_g = \text{Ric}_g - \frac{R_g}{4}g$  (le tenseur de Schouten), et  $d^D S_g \in C^\infty(\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M)$  sa dérivée anti-symétrisée, définie par  $d^D S_g(x, y, \cdot) := D_x S_g(y, \cdot) - D_y S_g(x, \cdot)$ . Il est connu depuis H. Weyl que  $d^D S_g = 0$  caractérise les métriques conformément plates. En considérant la décomposition sous l'action de  $O(3)$  de  $C^\infty(\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M)$  en composantes irréductibles, on peut montrer que  $d^D S_g$  appartient à une composante isomorphe à l'espace des 2-tenseurs symétriques à trace nulle. Le tenseur  $C_g$  est simplement l'image de  $d^D S_g$  par l'isomorphisme, on le note  $C_g$ . Il s'avère plus pratique à considérer dans certaines expressions.

Grâce à une propriété d'analyticité, l'annulation de  $C_g$  sur  $M$  équivaut à son annulation sur un ouvert. Pour tester l'annulation de  $C_g$ , l'idée est de faire une comparaison avec des *modèles conformément plats*, via des principes du maximum.

Je commence par donner un exemple de principe du maximum, et des informations géométriques qu'on peut en tirer. Il repose sur une identité du type "divergence égale quantité positive", et est inspirée par l'identité de Robinson en relativité générale (cf [She97], [Lin88]). Dans le contexte relativiste, ce genre d'arguments est utilisé pour montrer la symétrie sphérique de certains modèles stellaires.

On considère donc la fonction  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6}f^2$ , qu'on peut imaginer comme une sorte d'énergie. Sur  $M \setminus \{f = -1\}$ , on définit la métrique  $\bar{g} = (f + 1)^{-2}g$ . On a alors la formule suivante,

$$-\Delta_{\bar{g}} \left( |\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6}f^2 \right) = 2(f + 1)^4 |Z_g|^2 \quad (5.9)$$

<sup>14</sup>Dans le cas  $R_g \leq 0$ , les valeurs propres de  $\Delta_g$  étant positives on en déduit que  $f$  est constante, donc que  $g$  est d'Einstein ou bien  $R_g = 0$  et  $f = -1$

On voit immédiatement que la constance de  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6} f^2$  caractérise les métriques d'Einstein. Dans la suite, on pourra donc supposer la fonction non constante. Rappelons que sur la sphère standard, les solutions de (5.7) sont les harmoniques sphériques, i.e. à normalisation près les fonctions coordonnées données par le plongement  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . La constance de  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6} f^2$  s'écrit aussi  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  !

Par ailleurs, la positivité de (5.9) implique que  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6} f^2$  satisfait un principe du maximum fort sur le domaine  $M \setminus \{f = -1\}$ . Le maximum est donc atteint dans le niveau  $\{f = -1\}$  (strictement si la fonction n'est pas constante). Ce niveau a des propriétés très particulières. Cela est manifeste si on substitue (5.8) dans (5.7), car on a alors

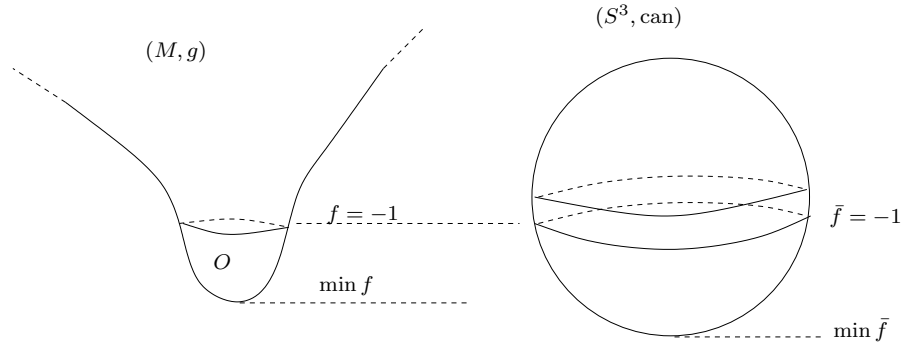
$$D_g df + \left(\frac{f}{2} + \frac{1}{3}\right) Rg = (1 + f) \text{Ric}_g, \quad (5.10)$$

et on voit que le second membre s'annule sur  $\{f = -1\}$ . Dans ce cas (5.10) se réduit à  $D_g df = \frac{R}{6} g$ . Il s'ensuit que chaque composante connexe de  $\{f = -1\}$  est un point, correspondant à un minimum local strict de  $f$ , ou une surface totalement ombilicale (i.e. les courbures principales sont égales) de courbure moyenne constante (égale à  $\frac{R}{3|\nabla f|}$ ). Le cas  $f \geq -1$  pouvant se traiter facilement, on peut supposer que  $\{f < -1\}$  est non vide. Dans la suite, on s'intéresse aux composantes connexes de  $\{f < -1\}$ . On peut facilement montrer que chacune de ces composantes connexes, mesurée avec  $f$ , est (strictement) plus petite que la composante connexe équivalente sur  $S^3$ . Précisons ce qu'on veut dire par là. Soit  $O$  une des composantes de  $\{f < -1\}$ , et  $e > 0$  le supremum de la fonction  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6} f^2$  sur  $O$ , atteint sur le bord de  $O$  d'après le principe du maximum.

**Lemme 5.19.** *Soit  $\bar{f}$  une solution de (5.7) sur  $(S^3, \text{can})$ , normalisée pour que  $|\nabla \bar{f}|^2 + \frac{R}{6} \bar{f}^2 = e$ . Alors*

$$\min_O f \geq \min_{S^3} \bar{f},$$

*et l'égalité est atteinte si et seulement si  $Z_g = 0$  sur  $O$ .*



*Démonstration.* Il existe  $m \in O$  minimisant  $f$  dans la composante, et  $\bar{m} \in S^3$  minimisant  $\bar{f}$ . On a alors  $\nabla_g f(m) = \nabla \bar{f}(\bar{m}) = 0$ , donc

$$0 + \frac{R}{6} f^2(m) \leq e = |\nabla \bar{f}|^2 + \frac{R}{6} \bar{f}^2 = \frac{R}{6} \bar{f}^2(\bar{m}).$$

En cas d'égalité, le maximum de  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6} f^2$  étant atteint dans  $O$ , le principe du maximum fort implique que cette fonction est constante, donc  $Z_g = 0$  d'après (5.9).  $\square$

On sait en dire plus sur la composante connexe, notons la  $S_0$ , où  $|\nabla_g f|_g^2 + \frac{R}{6} f^2$  atteint son maximum sur  $M \setminus \{f = -1\}$ . En écrivant que la dérivée seconde est négative et en utilisant l'équation de Gauss, on peut montrer que la courbure scalaire  $R^*$  de la métrique induite sur  $S_0$  satisfait l'inégalité

$$R^* \geq \frac{R}{3} + \frac{H^2}{2}, \quad (5.11)$$

où  $H$  est la courbure moyenne de la surface. Sous la forme  $R^* - \frac{H^2}{2} \geq \frac{R}{3}$ , on peut la voir comme une inégalité de Penrose ponctuelle, le terme de gauche étant l'intégrand dans l'expression de la masse de Hawking. Il découle de (5.11) et du fait qu'elle est orientable que  $S_0$  est une 2-sphère.

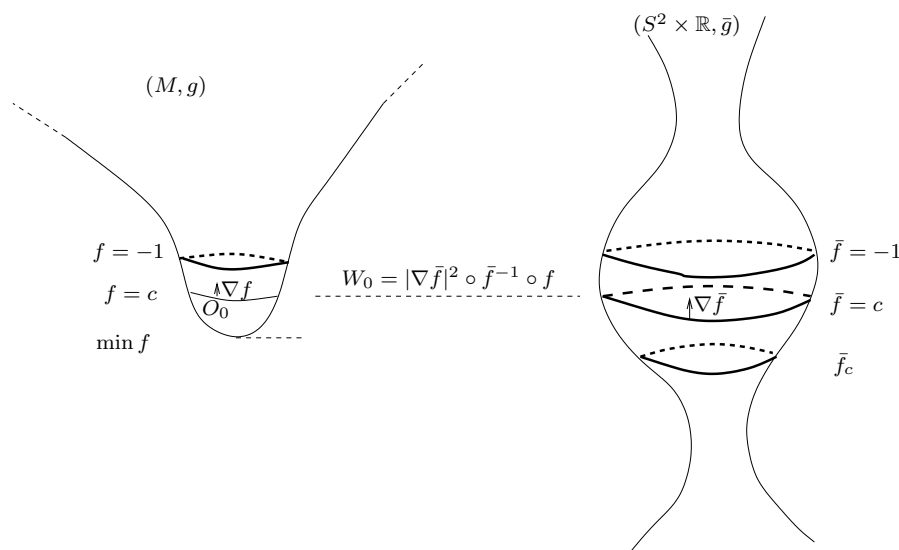
Dans la suite on considère la composante  $O_0$  de  $\{f < -1\}$  bordée par  $S_0$ . Raisonnant par contradiction, on suppose que  $Z_g \neq 0$  sur  $O_0$ , et donc d'après le lemme 5.19 que  $\min_{O_0} f > \min_{S^3} \bar{f}$ .

Pour poursuivre l'argument de comparaison, l'idée est de considérer à la place de la sphère d'autres solutions compactes conformément plates de (5.7), des *modèles conformément plats*, qu'on aura ajusté, et d'en faire la *transplantation* dans le domaine  $O_0$ . Les modèles conformément plats sont des solutions de (5.7) sur  $S^2 \times \mathbb{R}$ . On a vu [Laf83] qu'il n'existe pas d'autre solution compacte que la sphère ronde, mais il existe beaucoup de solutions non compactes. En particulier, on sait construire sur  $S^2 \times \mathbb{R}$  une famille à deux paramètres de solutions conformément plates, où l'on peut spécifier, sur un niveau  $-1$  donné, courbure moyenne et courbure scalaire. Précisément, fixons  $g_0$  une métrique ronde sur la sphère  $S^2$  de courbure scalaire  $R_0$ . Alors, pour tout couple  $(\bar{R}^*, \bar{H})$  de réels satisfaisant l'inégalité  $\bar{R}^* > \frac{R}{3} + \frac{\bar{H}^2}{2}$ , il existe sur  $S^2 \times \mathbb{R}$  un produit tordu  $\bar{g} = a^2(x)g_0 + dx^2$  et une fonction  $\bar{f} = \bar{f}(x)$  tels que (a)  $(\bar{g}, \bar{f})$  est solution de (5.7), de courbure scalaire constante  $R$  (b)  $\bar{f}(0) = -1$  (c)  $S^2 \times \{0\}$  est de courbure moyenne  $\bar{H}$  et de courbure scalaire induite  $\bar{R}^*$ .

La métrique  $\bar{g}$  est de plus périodique, et converge, lorsque  $\bar{R}^* - \frac{R}{3} - \frac{\bar{H}^2}{2} \rightarrow 0$ , sur une période vers la métrique ronde de  $S^3$  privée de ses pôles. Par contre,  $\bar{f}$  n'est jamais périodique (ça ne donne donc pas de solution sur  $S^2 \times S^1$ ).

Spécifier  $(\bar{R}^*, \bar{H})$  revient à fixer le germe d'ordre 2 de  $\bar{f}$  sur  $S^2 \times \{0\} := \bar{S}_0$ . Ce qu'on veut faire ensuite, c'est comparer  $|\nabla f|$  et  $|\nabla \bar{f}|$  sur des niveaux correspondants de  $f$  et de  $\bar{f}$ .

La technique est de transplanter la fonction  $|\nabla \bar{f}|$  dans  $O_0$ , en définissant dans  $O_0$  une fonction  $W_0$  ayant sur chaque niveau  $\{f = c\}$  la valeur de  $|\nabla \bar{f}|^2$  sur le niveau  $\{\bar{f} = c\}$ . Cela nécessite d'ajuster le modèle conformément plat pour que  $W_0$  soit défini sur  $O_0$  tout entier. On obtient ensuite un principe du maximum pour  $|\nabla f|^2 - W_0$  grâce à une inégalité du type  $L(|\nabla f|^2 - W_0) \geq 0$ , où  $L$  est un opérateur différentiel de la forme  $L(u) = \Delta_g u + \langle \nabla u, X \rangle + hu$ , le calcul faisant intervenir  $|C_g|^2$ . Nous donnons quelques détails de la construction.



On commence par fixer  $\bar{H} = H(S_0)$  de manière que  $|\nabla \bar{f}|$  ait même valeur sur  $\bar{S}_0$  que  $|\nabla f|$  sur  $S_0$ . On considère ensuite la composante connexe de  $\{\bar{f} < -1, \nabla \bar{f} \neq 0\}$  bordée par  $\bar{S}_0$ , qu'on note  $\bar{O}_0$ . On définit  $\bar{f}_c := \min_{\bar{O}_0} \bar{f}$ , i.e. la valeur critique pour laquelle  $\nabla \bar{f}$  s'annule la première fois en dessous de  $\bar{S}_0$ . En choisissant  $\bar{R}^*$  proche de  $\frac{R}{3} + \frac{\bar{H}^2}{2}$ ,  $\bar{f}_c$  est proche de la valeur correspondante sur la sphère  $S^3$ , donc  $\bar{f}_c < \min_{O_0} f$  d'après l'hypothèse faite précédemment. On peut alors définir sur  $O_0$ ,  $W_0 := |\nabla \bar{f}|^2 \circ \bar{f}^{-1} \circ f$ . L'opérateur  $L$  est construit à partir de l'équation (5.9) et du calcul correspondant pour  $W_0$ .

Cette technique permet de montrer que  $|\nabla f|^2 \leq W_0$ . Combiné à un argument de continuité, elle permet aussi d'ajuster plus finement le modèle conformément plat de manière que  $\bar{f}_c = \min_{O_0} f$ . Ceci implique que  $|\nabla f|^2 = W_0$  sur le bord du domaine  $O_0$ . Cependant, elle n'a pas permis d'aboutir à une contradiction. L'idée pour pousser la technique serait d'utiliser un principe du maximum à bord, la contradiction venant de l'annulation de  $|\nabla f|^2 - W_0$  au bord à un ordre suffisant. Cependant, la divergence de certains termes fait que l'existence de l'identité requise n'est toujours pas claire, à moins de rajouter des hypothèses techniques. Je ne sais pas si on peut circonvier ce problème en étant plus astucieux, ou si la difficulté est plus profonde.

## Quatrième partie

# Projets

Je présente quelques projets immédiats.

De manière générale, on sait peu de choses sur les variétés non compactes, ce qui en fait un vaste domaine de recherche.

En ce qui concerne le flot de Ricci, les théorèmes d'existence et d'unicité, sous hypothèse de courbures initiales bornées, sont relativement récents [Shi89][CZ06b]. Une question aussi naturelle que la classification des solutions périodiques, qui dans le cas compact dont des solitons<sup>15</sup>

<sup>15</sup>un soliton est un flot de Ricci auto-similaire :  $g(t)$  est de la forme  $g(t) = \lambda(t)\phi(t)^*g_0$ , où  $\lambda(t) > 0$  et  $\phi(t)$  est un difféomorphisme de la variété

[Per02], est encore ouverte. La preuve de Perelman consiste à construire de fonctionnelles monotones le long du flot, leur constance impliquant une rigidité. Le passage au cas non compact n'est pas clair. Pour avancer il paraît raisonnable d'ajouter des hypothèses de courbure. Mon étudiant en thèse, Alix Deruelle, a commencé à travailler sur ces questions, ainsi que sur des propriétés de rigidité des solitons.

Comme expliqué en 3.1, la topologie des 3-variétés ouvertes est très peu connue. L'idée est donc de commencer par étudier une classe de variétés définie par des contraintes géométriques, puis de relâcher les contraintes. Concernant les variétés de géométrie bornée à courbure scalaire uniformément positive, qu'on a classifiées dans le théorème 3.3, on peut relâcher les contraintes de deux manières :

- remplacer  $R_{\min} > 0$  par  $R > 0$ . Rappelons que dans la preuve du théorème 3.3, la condition  $R_{\min} > 0$  est utilisée seulement pour montrer l'extinction en temps fini de la solution chirurgicale. Sous l'hypothèse  $R > 0$  l'argument n'est plus valable : sur  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ , où  $\mathbb{R}^2$  est muni de la métrique du soliton cigare, le flot de Ricci est défini sur  $[0, +\infty)$  (et est constant à difféomorphisme près). Dans ce cas, la stratégie est d'étudier le comportement en temps long de la solution chirurgicale donnée par le théorème 3.7, i.e. de trouver le pendant du théorème de décomposition 2.8.

- garder l'hypothèse courbure bornée et supprimer l'hypothèse de minoration du rayon d'injectivité. Cela nécessite de revoir le théorème d'existence en temps fini 3.6. Cela semble difficile techniquement mais pas insurmontable. Un autre intérêt d'étendre la construction des solutions chirurgicales en ce sens serait de pouvoir l'utiliser ensuite sur des variétés à cusp. Cela peut-être utile aussi pour étudier l'espace des métriques d'une variété non compacte.

Une autre application intéressante du flot de Ricci avec chirurgie ou de ses variantes est l'étude de l'espace des métriques d'une variété donnée. Un exemple de telle application est le travail récent de F. Coda Marques [Mar]. Notons  $\mathcal{R}_+(M)$  l'espace des métriques de courbure scalaire strictement positive d'une variété  $M$ .

**Théorème 5.20** (F. Coda Marques). *Supposons que  $M^3$  soit une 3-variété compacte orientable telle que  $\mathcal{R}_+(M) \neq \emptyset$ . Alors l'espace des modules  $\mathcal{R}_+(M)/\text{Diff}(M)$  est connexe par arcs.*

Dans le cas de  $S^3$ , où le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation  $\text{Diff}_+(S^3)$  est connexe par arcs, ceci montre que  $\mathcal{R}_+(S^3)$  lui-même est connexe par arcs. La preuve du théorème 5.20 utilise le flot de Ricci avec chirurgie de Perelman, des méthodes de transformation conforme, et la construction de Gromov-Lawson. Elle consiste à relier par le flot une métrique donnée à un élément d'une famille de métriques "canoniques", ces métriques canoniques étant facilement reliées entre elles. Un projet est d'obtenir un résultat similaire sur  $\mathbb{R}^3$ . C'est envisageable en utilisant un hybride flot de Ricci à bulles/solution chirurgicale, qui requiert d'améliorer la construction pour se passer de l'hypothèse de la minoration du rayon d'injectivité.

Une autre question qu'on peut tenter d'étudier avec le flot est celle de la contractibilité de l'espace des modules, en lien avec la conjecture de Smale généralisée. Cette conjecture dit que sur les 3-variétés  $M$  de courbure sectionnelle constante  $> 0$ , l'inclusion  $\text{Isom}(M) \subset \text{Diff}(M)$  est une équivalence d'homotopie. Elle est vérifiée sur  $S^3$ , les lenticulaires et d'autres cas particuliers. Elle peut aussi être formulée dans un cadre que pour les variétés sphériques (voir le problème 9 de [Rub07]).

Sur les variétés compactes, je suis intéressé par la question suivante, qui m'a été posée par Michel Boileau : est-ce qu'une variété compacte  $M$  de dimension 4 admettant un revêtement fini  $\bar{M}$  hyperbolique est hyperbolique? Peut-être qu'une approche mélangeant flot de Ricci et

convergence/rigidité différentielle peut permettre d'avancer. Si  $d$  est le degré du revêtement, on sait (en relevant la métrique) que  $\text{minvol}(M) \geq \frac{1}{d} \text{vol}_{-1}(\bar{M})$ . Une idée est d'approcher le volume minimal, ou le volume minimal à courbure de Ricci minorée, par une suite minimisante, et de régulariser cette suite grâce au flot de Ricci, comme le fait Miles Simon [Sim09] dans une situation semblable en dimension 3.

Enfin je souhaite conclure le travail sur les points critiques de la fonctionnelle de Hilbert-Einstein, exposé dans la partie III.

## Index

- $V_0(M)$ , 20
- $\varepsilon$ -cou, 13
- $\varepsilon$ -épais, 20
- $\varepsilon$ -capuchon, 13
- $\varepsilon$ -homothétique, 14
- $\varepsilon$ -mince, 20
  
- application naturelle, 32
- atoroïdale, 7
  
- chirurgie métrique, 14
- compressible, 7
- courbure localement contrôlée au sens de Perelman, 20
  
- décomposition mince-épaisse, 20
- dilatation paraboliques, 10
  
- effondrement
  - au sens de Perelman, 22
  - faible, 21
  - rayon d'injectivité, 9
- effondrement :à courbure sectionnelle bornée, 22
  
- elliptisation, 6
- entrelacs, 20
- essentielle, 6
- extinction, 12
  - en temps fini, 18
  
- flot de Ricci, 8
  - à bulles, 18
  - avec chirurgie, 12
  - normalisé, 9
  - solution chirurgicale, 28
  
- géométrie, 6
- géométrique, 6
- géométrisation, 6
  
- hyperbolisation, 7
  
- incompressible, 7
- irréductible, 7
  
- Jaco-Shalen-Johansson, 7
  
- Kneser, 7
  
- largeur, 19
  
- non-effondrement, 35
- non-effondrement local, 17
  
- pincement de Hamilton-Ivey, 10
- Poincaré, 7
  
- solutions non singulière, 9
- sphérique, 6
  
- théorème
  - d'annulation, 24
  - d'effondrement, 22
  - d'effondrement faible, 21
  - d'existence en temps fini, 18
  - d'extinction en temps fini, 18
  - d'hyperbolisation, 7
  - de compacité, 11, 34
  - de décomposition mince-épaisse, 20
  - de rigidité, 29
  - des voisinages canoniques, 13, 17
- topologie de Gromov-Hausdorff, 34
  
- variété
  - de Haken, 7
  - de Seifert, 7
- voisinage canonique, 12, 13
  - centre d'un, 14
- volume
  - minimal, 30
  - simplicial, 23

## Références

- [And] Michael T. Anderson. Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds. In *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993–94)*, volume 30 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 49–82. Cambridge Univ. Press.
- [And02] Michael T. Anderson. Scalar curvature and the existence of geometric structures on 3-manifolds. I. *J. Reine Angew. Math.*, 553, 2002.
- [And04] Michael T. Anderson. Geometrization of three-manifolds via the Ricci flow. *Notices A.M.S.*, 51(2) :184–193, 2004.
- [And05] Michael T. Anderson. On uniqueness and differentiability in the space of Yamabe metrics. *Commun. Contemp. Math.*, 7(3) :299–310, 2005.
- [And06] Michael T. Anderson. Canonical metrics on 3-Manifolds and 4-Manifolds. *Asian J. Math.*, 10(1) :127–164, 2006.
- [Aub76] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976.
- [BBB06a] Laurent Bessières, Gérard Besson, and Michel Boileau. La preuve de la conjecture de Poincaré d’après g. perelman. *Image des maths*, pages 18–27. 2006.
- [BBB06b] Laurent Bessières, Gérard Besson, and Michel Boileau. La preuve de la conjecture de Poincaré d’après Perelman. In *L’héritage scientifique de Poincaré*, Échelles, pages 263–277. Belin, Paris, 2006.
- [BBB<sup>+</sup>07] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. Weak collapsing and geometrisation of aspherical 3-manifolds. ArXiv : 0706.2065, Jun 2007.
- [BBB<sup>+</sup>10a] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. Collapsing irreducible 3-manifolds with nontrivial fundamental group. *Inv. Math.*, 179(2) :435–460, 2010.
- [BBB<sup>+</sup>10b] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. *Geometrisation of 3-manifolds*. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society, To appear in 2010.
- [BBCG10] L. Bessières, G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Differentiable rigidity under ricci curvature lower bound. <http://arxiv.org/abs/0805.3845v2>, may 2010.
- [BBM09] Laurent Bessières, Gérard Besson, and Sylvain Maillot. Ricci flow on open 3-manifolds and positive scalar curvature, 2009. preprint.
- [BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropy and rigidity of locally symmetric spaces of strictly negative curvature. (Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative.). *Geom. Funct. Anal.*, 5(5) :731–799, 1995.
- [BCS05] Jeffrey Boland, Chris Connell, and Juan Souto. Volume rigidity for finite volume manifolds. *Am. J. Math.*, 127(3) :535–550, 2005.
- [Bes87] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Bes98] Laurent Bessières. A theorem on differential rigidity. (Un théorème de rigidité différentielle.). *Comment. Math. Helv.*, 73(3) :443–479, 1998.



- [Bes00] Laurent Bessières. Sur le volume minimal des variétés ouvertes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3) :965–980, 2000.
- [Bes05] Laurent Bessières. R. Hamilton and G. Perelman’s proof of the Poincaré conjecture. (Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman.). *Gaz. Math., Soc. Math. Fr.*, 106 :7–35, 2005.
- [Bes06a] Laurent Bessières. Poincaré conjecture and Ricci flow. An outline of the work of R. Hamilton and G. Perelman. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, 59 :11–15, 2006.
- [Bes06b] Laurent Bessières. Poincaré conjecture and Ricci flow. An outline of the work of R. Hamilton and G. Perelman. II. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, 60 :19–22, 2006.
- [Bes06c] Gérard Besson. Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci (d’après Perelman). In *Séminaire Bourbaki 2004-2005*, volume 307 of *Astérisque*, pages 309–348. Société mathématiques de France, Paris, France, 2006.
- [BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d’une variété riemannienne. (The spectrum of a Riemannian manifold)*. Lecture Notes in Mathematics. 194. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. VII, 251 p. DM 22.00 ; \$ 6.10 , 1971.
- [BLP05] Michel Boileau, Bernhard Leeb, and Joan Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds. *Ann. of Math. (2)*, 162(1) :195–290, 2005.
- [BMP03] Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [BN04] Hubert L. Bray and André Neves. Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than  $\mathbb{R}P^3$ . *Ann. of Math. (2)*, 159(1) :407–424, 2004.
- [CC96] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. *Ann. of Math. (2)*, 144(1) :189–237, 1996.
- [CC97] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differ. Geom.*, 46(3) :406–480, 1997.
- [CC00a] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II. *J. Differ. Geom.*, 54(1) :13–35, 2000.
- [CC00b] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III. *J. Differ. Geom.*, 54(1) :37–74, 2000.
- [CG86] Jeff Cheeger and Mikhael Gromov. Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I. *J. Differential Geometry*, 23 :309–346, 1986.
- [CG90] Jeff Cheeger and Mikhael Gromov. Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded II. *J. Differential Geometry*, 32 :269–298, 1990.
- [Che70] Jeff Cheeger. Finiteness theorems for Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 92 :61–74, 1970.
- [CK04] Bennett Chow and Dan Knopf. *The Ricci flow : an introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [CM05] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :561–569 (electronic), 2005.

- [CM07] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Width and finite extinction time of ricci flow. ArXiv :0707.0108, Jul 2007.
- [CZ06a] Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian J. Math.*, 10 :165–492, 2006.
- [CZ06b] Bing-Long Chen and Xi-Ping Zhu. Ricci flow with surgery on four-manifolds with positive isotropic curvature. *J. Differential Geom.*, 74(2) :177–264, 2006.
- [DE86] Adrien Douady and Clifford J. Earle. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math.*, 157 :23–48, 1986.
- [FJ89] Thomas F. Farrell and Lowell E. Jones. Negatively curved manifolds with exotic smooth structures. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4) :899–908, 1989.
- [FJ90] F.T. Farrell and L.E. Jones. Rigidity and other topological aspects of compact nonpositively curved manifolds. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 22(1) :59–64, 1990.
- [GHL90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.
- [GL83] Mikhael Gromov and H. Blaine Lawson, Jr. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 58 :83–196 (1984), 1983.
- [GLGA92] J. C. Gómez-Larrañaga and F. González-Acuña. Lusternik-Schnirel’mann category of 3-manifolds. *Topology*, 31(4) :791–800, 1992.
- [Gro82] Michael Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 56 :5–99 (1983), 1982.
- [Gro99] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Transl. from the French by Sean Michael Bates. With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes. Edited by J. LaFontaine and P. Pansu.* Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 152. Boston, MA : Birkhäuser. xix, 585 p. \$ 89.95 , 1999.
- [Ham82] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2) :255–306, 1982.
- [Ham86] Richard S. Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.*, 24(2) :153–179, 1986.
- [Ham95a] Richard S. Hamilton. A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. J. Math.*, 117(3) :545–572, 1995.
- [Ham95b] Richard S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, pages 7–136. Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [Ham99] Richard S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 7(4) :695–729, 1999.
- [Ive93] Thomas Ivey. Ricci solitons on compact three-manifolds. *Diff. Geom. Appl.*, pages 301–307, 1993.
- [Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

- [JS79] William H. Jaco and Peter B. Shalen. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*. Number 220 in Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, September 1979.
- [KL08a] Bruce Kleiner and John Lott. Notes on Perelman’s papers. *Geom. Topol.*, 12(5) :2587–2855, 2008.
- [KL08b] Bruce Kleiner and John Lott. Notes on Perelman’s papers. *Geom. Topol.*, 12(5) :2587–2855, 2008.
- [Kob87] Osamu Kobayashi. Scalar curvature of a metric with unit volume. *Math. Ann.*, 279 :253–265, 1987.
- [Koi79] Norihito Koiso. A decomposition of the space  $\mathcal{M}$  of Riemannian metrics on a manifold. *Osaka J. Math.*, 16(2) :423–429, 1979.
- [Laf83] Jacques Lafontaine. Sur la géométrie d’une généralisation de l’équation différentielle d’Obata. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 62(1) :63–72, 1983.
- [Lin88] Lee Lindblom. Static uniform-density stars must be spherical in general relativity. *J. Math. Phys.*, 29(2) :436–439, 1988.
- [Lot07] John Lott. The work of Grigory Perelman. In *ICM, vol I*, pages 66–76. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [Mai08a] Sylvain Maillot. Some applications of Ricci flow to 3-manifolds. In *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 25. Année 2006–2007*, volume 25 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 121–148. Univ. Grenoble I, Saint, 2008.
- [Mai08b] Sylvain Maillot. Some open 3-manifolds and 3-orbifolds without locally finite canonical decompositions. *Alg. Geom. Topol.*, 8 :1794–1810, 2008.
- [Mai09] Sylvain Maillot. Variétés hyperboliques de petit volume (d’après d. gabai, r. meyerhoff, p. milley, ...). Séminaire Bourbaki, exposé 1011, June 2009.
- [Mar] Fernando Coda Marques. Deforming three-manifolds with positive scalar curvature.
- [MM88] Mario J. Micallef and John Douglas Moore. Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. *Ann. of Math. (2)*, 127(1) :199–227, 1988.
- [Mor05] John W. Morgan. Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 42(1) :57–78 (electronic), 2005.
- [Mos73] G.D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Annals of Mathematics Studies. No.78. Princeton, N. J. : Princeton University Press and University of Tokyo Press. V, 195 p. \$ 7.00 , 1973.
- [MT07] John Morgan and Gang Tian. *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, volume 3 of *Clay mathematics monographs*. American Mathematical Society, 2007.
- [MT08] John Morgan and Gang Tian. Completion of the proof of the geometrization conjecture. <http://arxiv.org/abs/0809.4040v1>, september 2008.
- [Mye82] Robert Myers. Simple knots in compact, orientable 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 273(1) :75–91, 1982.
- [Oba62] M. Obata. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan*, 14 :333–340, 1962.
- [Per02] Grigori Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. ArXiv : math.DG/0211159, november 2002.

- [Per03a] Grigori Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. ArXiv : math.DG/0307245, july 2003.
- [Per03b] Grigori Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. ArXiv : math.DG/0303109, march 2003.
- [Rub07] J. H. Rubinstein. Problems around 3-manifolds. In *Workshop on Heegaard Splittings*, volume 12 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 285–298. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.
- [Sch89] Richard M. Schoen. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related. Topics in calculus of variations, Lect. 2nd Sess., Montecatini/Italy 1987, Lect. Notes Math. 1365, 120-154 (1989)., 1989.
- [She97] Ying Shen. A note on Fischer-Marsden’s conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(3) :901–905, 1997.
- [Shi89] Wan-Xiong Shi. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 30(2) :303–394, 1989.
- [Sim09] Miles Simon. Ricci flow of almost non-negatively curved three manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 630 :177–217, 2009.
- [ST89] Peter Scott and Thomas Tucker. Some examples of exotic noncompact 3-manifolds. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 40(160) :481–499, 1989.
- [SY00] Takashi Shioya and Takao Yamaguchi. Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound. *J. Differential Geometry*, 56 :1–66, 2000.
- [Yan82] Koichi Yano. Gromov invariant and  $S^1$ -actions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 29(3) :493–501, 1982.