Analyse 2

Cycle Préparatoire de Bordeaux, deuxième année

Laurent Michel

Automne 2021

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Généralités

1.1.1 Rappels sur les suites numériques

Dans toutes la suite, sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $|.|$ le module. On notera $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.1 *Soit $u = (u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

Définition 1.2 *Soit $u = (u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, |u_n - u_m| < \epsilon$$

Remarque 1.3 *On peut voir facilement que toute suite convergente est nécessairement de Cauchy.*

Théorème 1.4 *Soit $u = (u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors la suite u admet une limite.*

Les propriétés liées à l'ordre total sur $\mathbb{R}$ permettent d'obtenir des critères de convergence supplémentaires pour les suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5 *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Alors u admet une limite.*

Remarque 1.6 *Le résultat précédent s'étend bien sur au cas des suites décroissantes et minorées.*

1.1.2 Définitions et premières propriétés des séries

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On définit la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ par

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Définition 1.7 *On appelle série numérique de terme général u_n la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$. On notera $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cette suite.*

Définition 1.8 *Lorsque la suite* $(S_n)_n$ *est convergente, on note* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *sa limite. On dit alors que la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

Remarque 1.9 *Pour prouver la convergence d'une série numérique il suffit de regarder les sommes partielles à partir d'un certain rang. Plus précisement, si* (u_n) *est une suite de* $\mathbb{K}$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *alors*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Or, $\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ *est un scalaire fixe indépendant de* n*. Par suite,* (S_n) *converge si et seulement si la suite des sommes partielles à partir du rang* n_0 *converge.*

Exemple 1.10 *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *un nombre complexe. La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ *converge si et seulement si* $|z| < 1$*. Dans ce cas on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Définition 1.11 *Soit* $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ *une série numérique convergente. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la série* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *est convergente. De plus on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

où S_n *est la suite des sommes partielles. La suite* (R_n) *s'appelle suite des restes de la série* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *.*

Proposition 1.12 *Soit* $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ *une série numérique convergente alors* R_n *tend vers* 0 *lorsque* $n \to \infty$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n$$

et S_n tend vers $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ lorsque $n \to +\infty$. □

Proposition 1.13 *Soit* $u,v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et* $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$*. On suppose que les séries numériques* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *sont convergentes. Alors, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda u_n + \mu v_n)$ *est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la linéarité du passage à la limite pour les suites. □

Proposition 1.14 *Soit* $u = (u_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{K}$*. On suppose que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge. Alors* $\lim_{n\to 0} u_n = 0$.

Preuve. On remarque que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Par ailleurs les suites (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers la même limite. On en déduit que u_n tend vers 0. $\square$

Remarque 1.15 *Attention la réciproque du résultat précédent est fausse. Il existe des suites $(u_n)_n$ tendant vers 0 et telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ne converge pas.*

Exercice 1.16 *Soit $u = (u_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$. Montrer que la suite (u_n) admet une limite finie si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1} - u_n)$ converge.*

Définition 1.17 *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si la série des modules $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$*

Théorème 1.18 *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument alors elle converge.*

Preuve. Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. Alors la suite (Σ_n) définie par

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

converge. En particulier, elle vérifie le critère de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, |\Sigma_n - \Sigma_m| < \epsilon \tag{1.1}$$

Soit $\epsilon > 0$ et N donné par (1.1). Soient $n,m \geq N$ et supposons par exemple que $m \geq n$. Alors

$$|S_m - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = |\Sigma_m - \Sigma_n| < \epsilon$$

ce qui prouve que la suite (S_n) est de Cauchy. Par suite elle est convergente (grace au Théorème 1.4). $\square$

Remarque 1.19 *Attention la réciproque du théorème précédent est fausse. Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.*

1.2 Séries à termes positifs

Dans cette section on considère des séries dont le terme général u_n est un réel positif.

Théorème 1.20 *Soit (u_n) une suite de réels positifs. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.*

Preuve. Si la série converge, alors la suite (S_n) converge donc elle est majorée. Réciproquement supposons que la suite (S_n) est majorée. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de prouver qu'elle est croissante. Or, on a

$$S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite, (S_n) converge. $\square$

Remarque 1.21 *Soit (u_n) une suite de réels positifs. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne converge pas alors la suite des sommes partielles (S_n) tend vers l'infini lorsque $n \to \infty$.*

1.2.1 Théorèmes de comparaison généraux

Théorème 1.22 *Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors*

- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Preuve. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S'_n \leq S_n$.

Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge. Alors S_n est croissante, convergente et majorée par sa limite:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, S_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty$$

Par conséquent, S'_n est aussi majorée. Donc elle converge.

Réciproquement, si la suite S'_n ne converge pas. Comme c'est une suite croissante alors elle tend vers $+\infty$. En utilisant à nouveau la relation $S_n \geq S'_n$, on en déduit que S'_n tend vers $+\infty$.

□

Au regard de la Remarque 1.9, on a le corollaire suivant

Corollaire 1.23 *Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors*

- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

On rappelle que deux suites de scalaires non nuls sont équivalentes en l'infini ($u_n \sim v_n$ quand $n \to \infty$) si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Théorème 1.24 *Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$ quand $n \to \infty$. Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature (i.e. ou bien toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes). De plus*

– Si les séries convergent alors leurs restes sont équivalents

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k \quad \text{quand } n \to \infty$$

– Si les séries divergent alors leurs sommes partielles sont équivalentes

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{quand } n \to \infty$$

Preuve. La première partie du Théorème est immédiate. Montrons lesééquivalents. Supposons d'abord qu'on est dans le cas convergeant et notons

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k,\;\; R'_n = \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Comme $u_n \sim v_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\, (1-\epsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon)v_n$$

En sommant, il vient

$$\forall n \geq n_0,\, (1-\epsilon)R'_n \leq R_n \leq (1+\epsilon)R_n$$

ce qui montre $R_n \sim R'_n$. Considérons maintenant le cas divergeant et notons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\;\; S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\, (1-\epsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon)v_n.$$

Pour $n \geq n_0$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + (1+\epsilon)\sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - v_k) + (1+\epsilon)S'_n$$

Par suite, on a

$$\frac{S_n}{S'_n} \leq 1 + \epsilon + \frac{1}{S'_n}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - v_k|$$

Or, les suites S_n et S'_n tendent toutes les deux vers $+\infty$ et la quantité $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est indépendante de n. On en déduit donc $\frac{S_n}{S'_n} \leq 1+\epsilon+o(1) \leq 1+2\epsilon$ pour n assez grand. De même $\frac{S_n}{S'_n} \geq 1-\epsilon+o(1) \geq 1-2\epsilon$, ce qui achève la démonstration. □

1.2.2 Séries vs intégrales

Dans cette section on utilise des résultats sur les intégrales impropres pour étudier la convergence des séries positives. Pour toute fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, et tout réel $a \in \mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{I}_N(f;a) = \int_a^N f(x)dx.$$

Définition 1.25 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que la suite $(\mathcal{I}_N(a;f))_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand $N \to +\infty$. Alors, on note $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cette limite et on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\infty} f(x)dx$ est convergente.*

Théorème 1.26 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive* **décroissante** *et soit soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} f(t)dt$ sont de même nature.*

Preuve. Comme f est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [n,n+1]$ $f(n) \geq f(t) \geq f(n+1)$. Par suite,

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)dt \geq f(n+1).$$

En sommant entre 0 et N, il vient

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \geq \int_0^{N+1} f(t)dt \geq \sum_{n=0}^{N} u_{n+1} = S_{N+1} - u_0$$

Supposons d'abord que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ est convergente. Alors

$$S_{N+1} \leq \int_0^{N+1} f(t)dt + u_0 \leq \int_0^{\infty} f(t)dt + u_0 < +\infty$$

Par conséquent la suite (S_N) est majorée et on déduit du théorème 1.20 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Supposons maintenant que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ est divergente. Alors

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{N+1} f(t)dt = +\infty$$

et comme

$$S_N \geq \int_0^{N+1} f(t)dt + u_0$$

on en déduit que $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$. □

Théorème 1.27 Séries de Riemann *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. Considérons la suite $(\mathcal{I}_N(\alpha))_N$ définie par

$$\mathcal{I}_N(\alpha) = \int_1^N x^{-\alpha}dx.$$

Un calcul immédiat montre que

$$\mathcal{I}_N(\alpha) = \begin{cases} \ln(N) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(N^{1-\alpha} - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que la suite $(\mathcal{I}_N(\alpha))_N$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. En appliquant le Théorème 1.26, on obtient le résultat annoncé. □

Exercice 1.28 Séries de Bertrand *Soit $\beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.*

Proposition 1.29 *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une série numérique. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ est bornée. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.*

Preuve. Puisque $(n^\alpha u_n)$ est bornée, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

Or, la série $\sum \frac{C}{n^\alpha}$ converge d'après le Théorème 1.27. En appliquant le Théorème 1.20, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ converge. □

1.2.3 Critères de Cauchy et d'Alembert

Rappelons tout d'abord que la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge si $|r| < 1$ et diverge sinon. Les critères de Cauchy et de d'Alembert permettent de comparer une série à termes positifs avec les séries géométriques. Pour comparer u_n avec r^n le critère de Cauchy porte sur $u_n^{\frac{1}{n}}$, le critère de d'Alembert sur $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Théorème 1.30 (Critère de Cauchy) *Soit* (u_n) *une suite de réels strictement positifs. On suppose*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}^+.$$

Alors

- *Si* $\ell < 1$ *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*
- *Si* $\ell > 1$ *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge.*

Preuve. Supposons que $\ell < 1$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\ell + \epsilon < 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\, (u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \ell + \epsilon$$

qui devient en élevant à la puissance n:

$$\forall n \geq N,\, u_n \leq (\ell + \epsilon)^n$$

Or $0 < \ell+\epsilon < 1$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\ell+\epsilon)^n$ converge. En appliquant le corollaire 1.23, on obtient la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Supposons maintenant que $\ell > 1$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\ell - \epsilon > 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\, (u_n)^{\frac{1}{n}} \geq \ell - \epsilon$$

qui devient en élevant à la puissance n:

$$\forall n \geq N,\, u_n \geq (\ell - \epsilon)^n$$

Or $\ell - \epsilon > 1$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\ell - \epsilon)^n$ diverge. En appliquant le corollaire 1.23, on obtient la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. □

Remarque 1.31 *Dans le cas,* $\ell = 1$*, on ne peut pas conclure, il faut étudier la suite plus attentivement.*

Théorème 1.32 (Critère de d'Alembert) *Soit* (u_n) *une suite de réels strictement positifs. On suppose*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}^+.$$

Alors

- *Si* $\ell < 1$ *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*
- *Si* $\ell > 1$ *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge.*

Preuve. Supposons que $\ell < 1$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\ell + \epsilon < 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \epsilon.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq (\ell + \epsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$$

Or $0 < \ell + \epsilon < 1$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell + \epsilon)^{n-n_0}$ converge. En appliquant le corollaire 1.23, on obtient la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Supposons maintenant que $\ell > 1$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\ell - \epsilon > 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \epsilon.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \geq (\ell - \epsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$$

Or $\ell - \epsilon > 1$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell - \epsilon)^n$ diverge. En appliquant le corollaire 1.23, on obtient la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. □

Remarque 1.33 *Dans le cas, $\ell = 1$, on ne peut pas conclure, il faut étudier la suite plus attentivement.*

1.3 Séries quelconques

1.3.1 Séries alternées

On appelle série alternée toute série dont le terme général (u_n) est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$.

Théorème 1.34 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n v_n$ une série alternée. On suppose que la suite (v_n) est décroissante tend vers 0 quand $n \to \infty$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n v_n$ est convergente. De plus on a l'estimation suivante de la suite des restes:*

$$|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n v_n| \leq v_N,\ \forall N \geq 1.$$

Preuve. Soit (S_n) la suite des sommes partielles. On considère les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}). On va montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Comme $v_n \geq 0$ pour tout n, alors

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -v_n \leq 0$$

et par conséquent $S_{2n} \geq S_{2n+1}$ pour tout n. De plus comme $v_n \to 0$, alors $S_{2n+1} - S_{2n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$

car (v_n) est décroissante. Ceci prouve que (S_{2n}) est décroissante. De même, on montre que (S_{2n+1}) est croissante.

On déduit de ce qui précède que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Par suite, elles convergent vers une même limite ℓ. On en déduit que la suite (S_n) converge vers ℓ. Il reste à montrer l'estimation de la suite des restes

$$R_N := \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n v_n$$

Quitte à multiplier la série par (-1), on peut supposer que N est pair. En regroupant les termes par deux , on voit que

$$R_N = \sum_{j=0}^{\infty} (v_{N+2j} - v_{N+2j+1})$$

et comme la suite (v_n) est décroissante, on en déduit que $R_N \geq 0$ pout tout N. Par ailleurs, on a aussi

$$R_N = v_N - \sum_{j=0}^{\infty} (v_{N+2j+1} - v_{N+2j+2})$$

et par conséquent $R_N \leq v_N$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Exemple 1.35 *La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ *converge. On verra par la suite qu'on peut calculer sa somme:* $\ln(2)$.

Exercice 1.36 *(Théorème d'Abel) Soient* (a_n), (b_n) *deux suites. On suppose que*

- $a_n \to 0$ *quand* $n \to \infty$
- *la suite* $(\sum_{k=0}^{n} b_k)_n$ *est bornée*
- *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$ *est absolument convergente*

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ *converge.*

1.3.2 Produit de Cauchy des séries

Dans cette section on considère des séries à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.37 *Soient* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *deux séries. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ *avec terme général*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$$

Lemme 1.38 *Soient* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *deux séries positives convergentes. Alors leur produit de Cauchy* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ *est une série positive convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$$

Preuve. Soient

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_K,\, B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\, C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

D'après la définition des c_k, on a

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k} a_p b_q = \sum_{(p,q),\ p+q\leq n} a_p b_q \\ &\leq \Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} b_q\Big) = A_n B_n \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme on a l'inclusion

$$\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\, 0 \leq p,q \leq n\} \subset \{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\, p+q \leq 2n\}$$

on a aussi

$$A_n B_n = \Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} b_q\Big) = \sum_{0\leq p,q\leq n} a_p b_q \leq \sum_{0\leq p+q\leq 2n} a_p b_q = C_{2n}$$

On a donc montré que

$$C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n}$$

Par définition, les suites (A_n) et (B_n) convergent respectivement vers $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Comme la suite C_n est croissante, on déduit de l'inégalité de gauche qu'elle converge vers une limite $C \leq AB$. Par suite (C_{2n}) converge aussi et l'inégalité de droite montrer que $AB \leq C$. On en déduit $C = AB$. □

Théorème 1.39 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ est une série absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$$

Preuve. Soient

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ et } c'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}|.$$

Par définition, c_n est le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et c'_n est le produit de Cauchy des séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$.

D'après le lemme précédent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c'_n$ converge. Comme on a par ailleurs $|c_n| \leq c'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la série converge absolument.

Il reste à montrer que la suite $A_n B_n - C_n$ converge vers 0. En reprenant les calculs précédents, on voit que

$$\begin{aligned} |A_n B_n - C_n| &= |\sum_{n<p+q,\, p\leq n,\, q\leq n} a_p b_q| \leq \sum_{n<p+q\leq 2n} |a_p b_q| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{l=0}^{k} |a_l b_{k-l}| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} c'_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c'_k \end{aligned}$$

Or $\sum c'_k$ converge, donc le membre de droite tend vers 0. $\square$

Application 1.40 (Exponentielle d'un nombre complexe) *Pour tout* $z \in \mathbb{K}$ *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} z^n$ *est absolument convergente. On note* $\exp(z)$ *sa somme.Pour tout* $x,y \in \mathbb{K}$, *on a* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Preuve. L'absolue convergence de la série est évidente par croissance comparée de z^n et $n!$. Montrons la relation $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a $c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}$. D'après le théorème précédent, la série $\sum c_n$ converge absolument et on

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = \exp(x)\exp(y)$$

En utilisant la relation $c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}$, on voit que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \exp(x+y)$ ce qui permet de conclure. $\square$

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Normes

2.1.1 Généralités

Définition 2.1 *Soit $N : E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que N est une norme si elle vérifie les propriétés suivantes:*

i) Pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$ et

$$N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

iii) On a l'inégalité triangulaire

$$\forall x,y \in E,\, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

Dans ce cas, on dit que le couple (E,N) est un espace vectoriel normé.

Remarque 2.2 *La notation $\|x\|$ désigne souvent la norme (à définir) d'un vecteur x*

Exemple 2.3 *On a les exemples suivants de normes*

1. *la fonction $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$*
2. *Sur $\mathbb{K}^d$, $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|$ est une norme.*
3. *Sur $\mathbb{K}^d$, $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2}$ est une norme. On l'appelle norme Euclidienne.*
4. *Sur $\mathbb{K}^d$, $\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,d} |x_j|$ est une norme.*

Exercice 2.4 *Soient $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Montrer que les applications ci-dessous définissent bien une norme sur E*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|.$$

Exercice 2.5 *Sur l'espace des polynômes* $\mathbb{K}[X]$ *on définit*

$$N(P) = \sup\{|a_k|, \, k = 0, \dots, K\}, \ \ P(X) = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$$

Montrer que N *est une norme. Pouvez vous en donner d'autres?*

Définition 2.6 *Soit* E *un espace vectoriel et soient* N_1,N_2 *deux normes sur* E*. On dit que* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes s'il existe des constantes* $C,C' > 0$ *telles que*

$$CN_2(x) \leq N_1(x) \leq C'N_2(x)$$

pour tout $x \in E$*.*

Remarque 2.7 *La relation d'équivalence entre normes est une relation d'équivalence.*

Preuve. On a bien N équivalente à N (prendre $C = C' = 1$). Supposons N_1 équivalente à N_2, alors

$$CN_2 \leq N_1 \leq C'N_2$$

Par suite

$$\frac{1}{C'}N_1 \leq N_2 \leq \frac{1}{C}N_1.$$

ce qui prouve la symétrie de la relation. Enfin si N_1 est équivalente à N_2 et N_2 équivalente à N_3 alors

$$CN_2 \leq N_1 \leq C'N_2$$

et

$$DN_3 \leq N_2 \leq D'N_3$$

Par suite

$$CDN_3 \leq N_1 \leq C'D'N_3$$

donc N_1 et N_3 sont équivalentes. □

Proposition 2.8 *Les normes* $\|.\|_1$*,* $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont équivalentes sur* $\mathbb{K}^d$*.*

Preuve. On a clairement

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty$$

□

donc les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont équivalentes. De même, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty$$

ce qui montre que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes. L'équivalence entre $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ est alors une conséquence de la remarque précédente.

Exercice 2.9 *Les normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont elles équivalentes sur* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*.*

Définition 2.10 *Soit* E *un ensemble et* $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *une application. On dit que* d *est une distance sur* E *si les propriétés suivantes sont vérifiées:*

i) pour tout $x,y \in E$*,* $d(x,y) = d(y,x)$ *(symmétrie)*

ii) pour tout $x,y \in E$*,* $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$

iii) pour tout $x,y,z \in E, d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)*

Proposition 2.11 *Soit* (E,N) *un espace vectoriel normé. L'application* $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *donnée par* $d(x,y) = N(x-y)$ *est une distance*

Preuve. C'est immédiat. □

2.1.2 Espace préhilbertien

Définition 2.12 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes*

i) Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \phi(x,y)$ est linéaire

ii) Pour tout $x,y \in E$, on a $\phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$

iii) Pour tout $x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0$ et

$$\phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Un espace E muni d'un produit scalaire est dit prehilbertien

Dans la suite on notera souvent $\langle x,y\rangle$ le produit scalaire de x et y.
Théorème 2.13 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace prehilbertien. On a l'inégalité suivante*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

Preuve. Pour simplifier, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient $x,y \in E$. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle$. On a

$$f(t) = t^2\langle y,y\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle$$

et $f(t) \geq 0$ pour tout t. Comme f est un polynôme du second degrè, on en déduit que son discriminant est négatif:

$$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0.$$

Par suite $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ et le résultat est obtenu en prenant la racine carrée. □

Corollaire 2.14 *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace prehilbertien. Alors l'application $x \mapsto \|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme.*
Preuve. Le seul point qui mérite vérification est l'inégalité triangulaire. On se donne $x,y \in E$. D'après le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned} \tag{2.1}$$

On conclu en prenant la racine carrée. □

2.2 Rudiments de topologies des espaces vectoriels normés

Dans cette section $(E,\|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé (evn).
Définition 2.15 *Soient $a \in E$ et $r > 0$. On a appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

On a appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

Exercice 2.16 *Dessiner les boules ouvertes de* $\mathbb{R}^2$ *de centre* 0 *et de rayon* 1 *pour les normes* $\|.\|_j$*,* $j = 1,2,\infty$*.*

Définition 2.17 *Soit* A *un sous ensemble de* E*. On dit que* A *est borné s'il existe* $M > 0$ *tel que* $A \subset \bar{B}(0,M)$*, c'est à dire*

$$\forall x \in A,\ \|x\| \leq M$$

Définition 2.18 *Soit* U *un sous ensemble de* E*. On dit que* U *est ouvert si*

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x,r) \subset U.$$

On dit qu'un sous ensemble F *de* E *est fermé si son complémentaire* $E \setminus F$ *est ouvert.*

Exemple 2.19 *Les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.*

Remarque 2.20 *Les ensembles* E *et* $\emptyset$ *sont à la fois ouverts et fermés. Ce sont les seuls sous ensembles de* E *à posséder cette propriété.*

Théorème 2.21 *Soit* E *un espace vectoriel et soient* N_1,N_2 *deux normes sur* E*. On suppose que* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes, alors*

- *-* $U \subset E$ *est ouvert pour* N_1 *ssi* U *est ouvert pour* N_2
- *-* $F \subset E$ *est fermé pour* N_1 *ssi* F *est fermé pour* N_2

Preuve. Il suffit de montrer que U ouvert pour N_1 implique U ouvert pour N_2. On suppose donc que U est ouvert pour N_1. On se donne $a \in U$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $B_{N_1}(a,r) \subset U$ (ou l'on note $B_N(a,r)$ la boule pour la norme N). Par ailleurs, comme N_1 et N_2 sont équivalentes, il existe $c > 0$ tel que $N_1 < cN_2$. Supposons maintenant que $x \in B_{N_2}(a,\frac{r}{c})$, alors

$$N_1(x-a) \leq cN_2(x-a) < c\frac{r}{c} = r$$

donc $x \in B_{N_1}(a,r)$. Comme cet ensemble est contenu dans U, on en déduit que $B_{N_2}(a,r) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert pour N_2. □

Proposition 2.22 *Soit* $(E,\|.\|)$ *un espace vectoriel normé et soient* $\mathscr{F}$ *l'ensemble des fermés de* E *et* $\mathscr{O}$ *l'ensemble des ouverts de* E*. Alors*

i) $\mathscr{O}$ *est stable par union quelconque et intersection finie.*

ii) $\mathscr{F}$ *est stable par union finie et intersection quelconque.*

Preuve. On remarque d'abord que i) et ii) sont équivalents par passage au complémentaire. On va donc montrer i). Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une collection d'ouverts et soit $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$. Soit $a \in \Omega$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in \Omega_{i_0}$. Comme Ω_{i_0} est ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \Omega_{i_0}$. Comme $\Omega_{i_0} \subset \Omega$, il suit que $B(a,r) \subset \Omega$.

Supposons maintenant que l'ensemble I est fini et soit $\Omega' = \cap_{i\in I}\Omega_i$. Soit $a \in \Omega'$. Pour tout $i \in I$, $a \in \Omega_i$ donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(a,r_i) \subset \Omega_i$. On pose $r = \min_{i\in I} r_i$. Comme I est fini alors $r > 0$. De plus, par définition, pour tout $i \in I$, on a

$$B(a,r) \subset B(a,r_i) \subset \Omega_i$$

On en déduit $B(a,r) \subset \Omega$. $\square$

Théorème 2.23 *Soit A un sous ensemble de E.*

- *Il existe un unique ouvert $\mathring{A}$ contenu dans A et maximal pour l'inclusion (i.e. tout ouvert de E contenu dans A est nécessairement contenu dans $\mathring{A}$). On appelle $\mathring{A}$ l'intérieur de A.*
- *Il existe un unique fermé $\bar{A}$ contenant A et minimal pour l'inclusion (i.e. tout fermé de E contenant A contient nécessairement $\bar{A}$). On appelle $\bar{A}$ l'adhérence de A.*

Preuve. Soit Ω_A l'ensemble des ouverts de E contenus dans A. On définit $\mathring{A} = \cup_{\omega \in \Omega_A} \omega$. Par définition, $\mathring{A} \subset A$ et d'après la proposition précédente, $\mathring{A}$ est ouvert. Supposons maintenant que U est un ouvert de E contenu dans A. Alors $U \in \Omega_A$ donc $U \subset \mathring{A}$.

Le deuxième point peut se montrer aisément par passage au complémentaire. On peut aussi refaire la démonstration. Soit F_A l'ensemble des fermés de E contenant A. On définit $\overline{A} = \cap_{G \in F_A} G$. Par définition, $A \subset \overline{A}$ et d'après la proposition précédente, $\overline{A}$ est fermé. Supposons maintenant que H est un fermé de E contenant A. Alors $H \in F_A$ donc $\overline{A} \subset H$. $\square$

Exemple 2.24 *Soient $a \in E$ et $r > 0$ alors, $\bar{B}(a,r)$ est l'adhérence de $B(a,r)$ et $B(a,r)$ est l'intérieur de $\bar{B}(a,r)$.*

2.3 Suites dans les evn

Définition 2.25 *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite u converge vers une limite $\ell \in E$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \epsilon$$

Remarque 2.26 *Comme dans le cas des suites numériques, on a unicité de la limite.*

La notion de convergence dépend a priori de la norme qu'on utilise. Cependant lorsque deux normes sont équivalentes les suites convergentes sont les mêmes.

Proposition 2.27 *Soit E un espace vectoriel et N_1,N_2 deux normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Alors toute suite convergente pour N_1 est convergente pour N_2 et la limite est identique.*

Preuve.

$\square$

Définition 2.28 *Soit $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

Remarque 2.29 *On peut voir facilement que toute suite convergente est nécessairement de Cauchy.*

Définition 2.30 *Soit $(E,\|.\|)$ un evn. On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

On admet le résultat fondamental suivant:
Théorème 2.31 *L'espace* $(\mathbb{R},|.|)$ *est complet.*

Définition 2.32 *Soit* $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. *On dit que la suite* (u_n) *est bornée si l'ensemble* $\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *est borné dans* E. *Autrement dit s'il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \|u_n\| \leq M.$$

Proposition 2.33 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Laissée au lecteur. □

Définition 2.34 *Soit* $u = (u_n)$ *une suite de* E. *On dit que* $v = (v_n)$ *est une suite extraite de* u *si elle est de la forme* $v_n = u_{\varphi(n)}$ *avec* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante.*

Exemple 2.35 *Soit* $u_n = (-1)^n$. *Les applications* $\varphi_1(n) = 2n+1$ *et* $\varphi_2(n) = 2n$ *sont strictement croissantes. Les suites extraites associées sont*

$$v_n = u_{2n+1} = -1 \text{ et } w_n = u_{2n} = 1.$$

On remarque que ces suites convergent vers des limites différentes.

Exercice 2.36 *Soit* $u = (u_n)$ *une suite de* E. *On suppose que* (u_n) *converge vers une limite* ℓ. *Montrer que toute suite extraite de* u *converge vers* ℓ.

Le résultat suivant donne une caractérisation des ensembles fermés à l'aide des suites.
Théorème 2.37 *Soit* $(E,\|.\|)$ *un evn et soit* F *une partie de* E. *Alors* F *est fermée si et seulement si pour toute suite* (u_n) *d'éléments de* F *convergeant vers* ℓ, *on a* $\ell \in F$.
Preuve. Supposons que F est fermé et soit (u_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $\ell \in E$. Supposons par l'absurde que $\ell \notin F$, c'est à dire $\ell \in E \setminus F$. Comme F est fermé alors $E \setminus F$ est ouvert. Par suite il existe $r > 0$ tel que $B(\ell,r) \subset E \setminus F$. On applique alors la définition de la convergence avec $\epsilon = r$. Il existe n_0 tel que $u_{n_0} \in B(\ell,r)$. Or $u_{n_0} \in F$ par définition et $B(\ell,r) \subset E \setminus F$. D'ou une contradiction.

Supposons maintenant que F n'est par fermé. Alors $E \setminus F$ n'est pas ouvert donc il existe $\ell \in E \setminus F$ tel que

$$\forall r > 0,\, B(\ell,r) \cap F \neq \emptyset$$

En prenant $\epsilon = \epsilon_n = 2^{-n}$, on en déduit l'existence d'une suite $u_n \in B(\ell,2^{-n}) \cap F$. Par définition, c'est une suite d'éléments de F et comme $2^{-n} \to 0$ quand $n \to \infty$ la suite (u_n) converge vers $\ell \notin F$. Ceci prouve le résultat (par contraposée). □

Corollaire 2.38 *Soit* $(E,\|.\|)$ *un evn et soit* A *une partie de* E *et soit* $a \in E$. *Alors* $a \in \bar{A}$ *si et seulement si il existe une suite d'éléments de* A *qui converge vers* a. *Autrement dit* $\bar{A}$ *est exactement l'ensemble des limites de suites d'éléments de* A.

Preuve. Soit $a \in E$ et supposons que a est limite d'une suite u d'éléments de A. Comme $A \subset \bar{A}$, u est une suite d'éléments de $\bar{A}$ et comme $\bar{A}$ est fermé alors $a \in \bar{A}$ d'après le théorème précédent.

Supposons maintenant que $a \in \bar{A}$. Si $a \in A$ il n'y a rien à faire (prendre la suite constant a). Si $a \in \bar{A} \setminus A$ alors pour tout $\epsilon > 0$, $B(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dans le cas contraire on aurait $B(a,\epsilon) \cap A = \emptyset$ pour une certain $\epsilon > 0$ et par suite $F := \bar{A} \cap (E \setminus B(a,\epsilon))$ contiendrait A. Or F est fermé par définition, donc on aurait $\bar{A} \subset \bar{A} \cap (E \setminus B(a,\epsilon))$ ce qui contredit $a \in \bar{A}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(a,2^{-n}) \cap A \neq \emptyset$. En choisissant $a_n \in B(a,2^{-n}) \cap A$ pour tout n, on construit ainsi une suite d'éléments de A qui converge vers a. $\square$

2.4 Espace vectoriels normés de dimension finie

On commence par énoncer un résultat fondamental que nous admettons.

Théorème 2.39 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sont équivalentes sur E.*

Remarque 2.40 *Si on ne suppose plus que E est de dimension finie, le résultat ci dessus devient faux. Pour s'en convaincre, on peut prendre $E = C([0,1])$ et considerer les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.*

Théorème 2.41 *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors E est complet.*

Preuve. Soit (x^n) une suite de Cauchy dans E. Comme E est de dimension finie, il existe une base $(e_1,\ldots,e_N)$ de E. Tout élément x de E s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^N x_j e_j$ et on définit sur E la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1,\ldots,N} |x_j|.$$

D'après le théorème précédent, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Par conséquent la suite (x^n) est de Cauchy pour $\|.\|_\infty$. On en déduit que pour tout $j = 1,\ldots,N$ la suite $(x_j^n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet elle admet donc une limite x_j. On pose $x = \sum_{j=1}^N x_j e_j$. D'après ce qui précède, la suite (x^n) converge vers x pour $\|.\|_\infty$ et donc pour $\|.\|$ $\square$

En reprenant la preuve précédente, on obtient facilement le théorème suivant.

Théorème 2.42 *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $(e_1,\ldots,e_N)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note x_i la ieme coordonnée de x dans cette base. Alors, toute suite $(x^n)_n$ de E converge vers $x \in E$ si set seulement si pour tout $i = 1,\ldots,N$, la suite $(x_i^n)_n$ converge vers x_i dans $\mathbb{R}$.*

2.5 Limites et continuité de fonctions définies sur un evn

Dans cette section on considère des evn $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ et $(G,\|.\|_G)$. Afin d'alléger les notations, on note indifféremment $\|.\|$ l'une ou l'autre des deux normes précédentes.

Définition 2.43 *Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A de E et soit $a \in \bar{A}$. On dit que la fonction f converge vers $y \in F$ lorsque x tend vers a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, (\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - y\| < \epsilon). \tag{2.2}$$

On notera $\lim_{x\to a} f(x) = y$.

Remarque 2.44 *Lorsqu'elle existe la limite d'une fonction en un point est unique.*

Proposition 2.45 *Soient $f : A \to F$ et $g : A \to F$ deux applications et soit $a \in \bar{A}$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = y$ et $\lim_{x\to a} g(x) = z$. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a*

$$\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda y + \mu z$$

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve du théorème identique sur les fonctions numériques. $\square$

Théorème 2.46 *Soit $f : A \to F$ une application et soit $a \in \bar{A}$ et $\xi \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

i) la fonction f converge vers $y \in F$ lorsque x tend vers a

ii) pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $y_n := f(x_n)$ converge vers y.

Preuve. Montrons $i) \Longrightarrow ii)$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ comme dans (2.2). Comme la suite (u_n) converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n - a\| < \delta$. En appliquant (2.2), il vient $\|f(u_n) - y\| < \epsilon$, pour tout $n \geq N$ ce qui prouve que (y_n) converge vers y.

Montrons maintenant $ii) \Longrightarrow i)$. On démontre la contraposée. On suppose donc que la fonction f ne converge pas vers y quand x tend vers a. Ceci signifie que

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in B(a,\delta), \|f(x) - y\| \geq \epsilon. \tag{2.3}$$

On applique successivement cette assertion avec $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit qu'il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$ et

$$\forall n \geq 1, \|f(x_n) - y\| \geq \epsilon.$$

Autrement dit la suite (x_n) converge vers a mais $f(x_n)$ ne converge pas vers y. Ceci permet de conclure.

$\square$

Théorème 2.47 *Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ et soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications telles que $f(A) \subset B$. On suppose qu'il existe $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ et $z \in G$ tels que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y\to b} g(y) = z.$$

Alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = z.$$

Preuve. On commence par remarquer que puisque $f(A) \subset B$, l'application $g \circ f$ est bien définie.

On utilise la caractérisation séquentielle de la convergence. On se donne une suite (x_n) de A convergeant vers a. On doit montrer que $g \circ f(x_n)$ converge vers z. Comme $\lim_{x \to a} f(x) = b$ alors la suite $y_n := f(x_n)$ converge vers b lorsque $n \to \infty$. De même, comme $\lim_{y \to b} g(y) = z$ alors la suite $g(y_n)$ converge vers z. Or $g(y_n) = g \circ f(x_n)$ donc la suite $g \circ f(x_n)$ converge vers z, ce qui prouve le résultat. □

Définition 2.48 *Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Soit $a \in A$. On dit que f est continue au point a si elle admet une limite en a. Dans ce cas on a nécessairement* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Preuve. Supposons que f est continue en a. D'après la définition, il existe $y \in F$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, (\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - y\| < \epsilon).$$

Comme $a \in A$, on peut prendre $x = a$ dans la définition précédente. On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$, $\|y - f(a)\| < \epsilon$. Ceci n'est possible que si $y = f(a)$. □

Remarque 2.49 *Dans la définition précédente, le point a appartient à l'ensemble de définition de A. C'est la différence fondamentale entre la notion de limite et celle de continuité.*

Définition 2.50 *Soit $f : A \to F$ une application. On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point a de A.*

Proposition 2.51 *Soient $f : A \to F$ et $g : A \to F$ deux applications continues en un point $a \in A$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème identique sur les limites □

Corollaire 2.52 *Soient $f : A \to F$ et $g : A \to F$ deux applications continues sur A et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur A.*

Théorème 2.53 *Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ et soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications telles que $f(A) \subset B$. On suppose en outre que f et g sont continues. Alors $g \circ f$ est continue.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème identique sur les limites □

Exemple 2.54 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale*

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d = 1}^{N} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d} x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$$

Alors f est continue.

Preuve. Par linéarité, il suffit de montrer que pour tout $\alpha_1,\ldots,\alpha_d \in \mathbb{N}$ la fonction

$$e_\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_d^{\alpha_d}$$

est continue. Soit $(x^{(n)})$ une suite de $\mathbb{R}^d$ convergeant vers x. Alors $(x_j^{(n)})$ converge vers x_i pour tout $i = 1,\ldots,d$. Par produit de limites, on a

$$(x_1^{(n)})^{\alpha_1}\ldots(x_d^{(n)})^{\alpha_d} \to x_1^{\alpha_1}\ldots x_d^{\alpha_d}$$

quand $n \to \infty$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Théorème 2.55 *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel et soient $f : E \to \mathbb{K}$ et $g : E \to \mathbb{K}$ deux applications continues. Alors*

1. *l'application $h : E \to \mathbb{K}$ définie par $h(x) = f(x)g(x)$ est continue*
2. *si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$, alors l'application $k : E \to \mathbb{K}$ définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue*

Preuve. Soit (x_n) une suite de E convergeant vers $x \in E$. Comme f et g sont continues, alors $f(x_n) \to f(x)$ et $g(x_n) \to g(x)$ quand $n \to \infty$. Par suite

$$h(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x) = h(x) \text{ quand } n \to \infty$$

ce qui prouve que h est continue.

La continuité de k se montre de la même manière. $\square$

Théorème 2.56 *Soit $f : E \to F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *f est continue*

ii) *pour tout $K \subset F$ fermé, $f^{-1}(K)$ est fermé*

iii) *pour tout $\Omega \subset F$ ouvert, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert*

Preuve. Montrons *i)* $\Longrightarrow$ *ii)*. Soit K un fermé de F et soit (x_n) une suite d'éléments de $f^{-1}(K)$ convergeant vers $x \in E$. Par définition $(f(x_n))$ est une suite d'éléments de K et comme f est continue, alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. Comme K est fermé, on en déduit que $f(x) \in K$, c'est à dire $x \in f^{-1}(K)$.

Montrons maintenant *ii)* $\Longrightarrow$ *iii)*. C'est une simple conséquence de l'identité

$$f^{-1}(F \setminus K) = E \setminus f^{-1}(K)$$

et du fait qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé.

Montrons enfin que *iii)* $\Longrightarrow$ *i)*. On doit montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, (\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon).$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. L'ensemble $B(f(a),\epsilon)$ est un ouvert de F, donc d'après le ii), son image réciproque par f est un ouvert de E. Or on a $a \in f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$. En appliquant f, il vient

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\epsilon)$$

qui peut exactement se réecrire sous la forme

$$\forall x \in E, (\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon).$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

2.6 Continuité des applications linéaires

Théorème 2.57 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $u : E \to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) u est continue

ii) u est continue en 0

iii) u est bornée sur $\bar{B}(0,1)$

iv) u est Lipschitzienne

Preuve. $i \Longrightarrow ii)$ est évident.
$ii) \Longrightarrow iii)$ Comme u est linéaire, alors $u(0) = 0$ et comme u est continue en 0, il vient

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E \; (\|x\| < \delta \Longrightarrow \|u(x)\| < \epsilon)$$

On prend $\epsilon = 1$, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall \|x\| < \delta, \, \|u(x)\| \leq 1$$

Soit $x \in \bar{B}(0,1)$, alors $y := \frac{\delta x}{2}$ vérifie, $\|y\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. Par suite

$$1 \geq \|u(y)\| = \frac{\delta}{2}\|u(x)\|$$

On en déduit $\|u(x)\| \leq \frac{2}{\delta}$.

$iii) \Longrightarrow iv)$ Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall \|x\| \leq 1, \, \|u(x)\| \leq M$$

Soient $x,y \in E$ tels que $x \neq y$. Alors $\xi := \frac{x-y}{\|x-y\|}$ appartient à $\bar{B}(0,1)$. Comme u est linéaire, on en déduit

$$M \geq \|u(\xi)\| = \frac{1}{\|x-y\|}\|u(x-y)\| = \frac{1}{\|x-y\|}\|u(x) - u(y)\|.$$

Autrement dit

$$\|u(x) - u(y)\| \leq M\|x - y\|$$

ce qui prouve iv).

$iv) \Longrightarrow i)$ est évident.

□

Notation 2.58 *Soient E,F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.*

Théorème 2.59 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est de dimension finie. Alors toute application linéaire $u : E \to F$ est continue.*

Preuve. On doit montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u(x)\| \leq C\|x\|, \, \forall x \in E$$

Comme E est de dimension finie, il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ base de E et l'application

$$x = \sum_j x_j e_j \mapsto \|x\|_\infty := \max_j(|x_j|)$$

est une norme qui est équivalente à $\|.\|$. Par suite, il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u(x)\| \leq C\|x\|_\infty, \forall x \in E.$$

Prenons $C = \sum_j \|u(e_j\|$, alors

$$\|u(x)\| = \|\sum_j x_j u(e_j)\| \leq \sum_j |x_j|\|u(e_j)\| \leq C\|x\|_\infty.$$

□

Remarque 2.60 *Si on sait seulement que F est de dimension finie, on ne peut rien conclure. Par exemple l'application linéaire $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $D(P) = P'(1)$ n'est pas continue pour la norme $\|P\| = \sup|a_j|$, $P(X) = \sum_j a_j x^j$. On a en effet $D(X^n) = n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $\|X^n\| = 1$.*

Théorème 2.61 *Soit $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ une application linéaire continue. Alors*

$$\sup_{x\in\bar{B}(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On note $\|u\|_{E\to F}$ cette quantité.

Preuve. Notons respectivement A, B et C les trois termes de l'égalité. On a clairement $A \geq B$.

Montrons que $C \leq B$. Soit $x \neq 0$, alors $y := \frac{x}{\|x\|}$ vérifie $\|y\| = 1$. Par suite

$$\|u(y)\| \leq B$$

Par linéarité de u, on en déduit

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq B$$

et en prenant le sup sur les $x \neq 0$, il vient $C \leq B$.

Il reste à montrer que $A \leq C$. Soit $x \in \overline{B}(0,1)$. Si $x = 0$ alors $\|u(x)\| = 0 \leq C$. Supposons maintenant que $x \neq 0$. Comme $\|x\| \leq 1$, alors

$$\|u(x)\| \leq \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq C$$

En prenant le sup sur x, on obtient $A \leq C$. □

Théorème 2.62 *L'application $u \mapsto \|u\|_{E\to F}$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$.*

Preuve.

L'identité $\|\lambda u\|_{E\to F} = |\lambda|\|u\|_{E\to F}$ est immédiate.

Soit $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ telle que $\|u\|_{E\to F} = 0$. Alors

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$$

donc $\|u(x)\| = 0$ pour tout $x \in E$. Donc $u = 0$.

Soient $u,v \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Alors

$$\begin{aligned}\|\lambda u + v\|_{E\to F} &= \sup_{\|x\|=1} \|u(x) + v(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|u(x)\| + \|v(x)\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| + \sup_{\|y\|=1} \|v(y)\| = \|u\|_{E\to F} + \|v\|_{E\to F}\end{aligned} \tag{2.4}$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire. □

Théorème 2.63 *Soit $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$, alors*

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq \|u\|_{E\to F}\|x\|_E$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la définition de la norme $\|.\|_{E\to F}$. □

Théorème 2.64 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et soient $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}_c(F,G)$. Alors $v \circ u \in \mathscr{L}_c(E,G)$ et*

$$\|v \circ u\|_{E\to G} \leq \|v\|_{F\to G}\,\|u\|_{E\to F}$$

Preuve. On déduit que théorème précédent que pour tout $x \in E$, on a

$$\|v \circ u(x)\| = \|v(u(x))\| \leq \|v\|_{F\to G}\|u(x)\| \leq \|v\|_{F\to G}\,\|u\|_{E\to F}\|x\|$$

En prenant le sup sur les $x$de norme 1, on obtient le résulat annoncé. □

Chapitre 3

Suites et séries de fonction

3.1 Suites de fontions

3.1.1 Généraliés

Notation 3.1 *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On note* $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ *l'espace vectoriel des fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$*.*

Définition 3.2 *On appelle suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *toute application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est donc une fonction de* I *dans* $\mathbb{K}$*.*

On notera $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *l'espace des suites de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$*.*

Définition 3.3 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$ *et soit* $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f *si pour tout* $x \in I$ *la suite de scalaires* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$*.*

Remarque 3.4 *En utilisant des quantificateurs, la définition précédente s'écrit:*

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Définition 3.5 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$ *et soit* $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Proposition 3.6 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions convergeant uniformément vers une limite* f*. Alors la suite converge simplement vers* f*.*

Preuve. C'est évident. □

Notation 3.7 *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On note* $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ *l'espace vectoriel des fonctions bornées de* I *dans* $\mathbb{K}$*.*

Proposition 3.8 *Pour tout* $u \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ *la quantité*

$$\|f\|_{\mathscr{B}(I,\mathbb{K})} := \sup_{x\in I} |f(x)|$$

est bien définie. De plus, l'application

$$\mathscr{B}(I,\mathbb{K}) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathscr{B}(I,\mathbb{K})}$$

définit une norme sur $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$*.*

Preuve. Laissée en exercice. $\square$

Théorème 3.9 *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$. Alors (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si (f_n) tend vers f dans $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ (autrement dit si $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to +\infty$).*

Preuve. D'après la définition, la suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

qui équivaut à

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$\square$

Définition 3.10 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On dit que (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Théorème 3.11 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Alors, (f_n) converge uniformément vers une limite f si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.*

Preuve. Il est facile de voir que si (f_n) converge uniformément vers f alors elle vérifie le critère de Cauchy uniforme. Montrons maintenant la réciproque. Comme (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ vérifie le critère de Cauchy. Elle est donc convergente et on note $f(x)$ sa limite.

On doit montrer que (f_n) converge uniformément vers f. On fixe $\epsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n,m \geq \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

En faisant $m \to \infty$ dans cette assertion, il vient

$$\forall n \geq \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

qui montre exactement la convergence uniforme de (f_n) vers f. $\square$

3.1.2 Théorèmes d'interversion

Théorème 3.12 (Théorème de la double limite) *Soit* $(f_n) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonction et soit* $a \in \bar{I}$. *On suppose que*

i) la suite (f_n) *converge uniformément vers une fonction* f

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n *admet une limite finie* ℓ_n *lorsque* x *tend vers* a.

Alors, la suite (ℓ_n) *converge vers une limite* ℓ *et* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Preuve. On commence par montrer que la suite (ℓ_n) converge. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. On se donne $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme la suite (f_n) est uniformément convergente, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n,m \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Soient $n,m \geq N$. Par définition de la limite, il existe $\delta_n > 0$ et $\delta_m > 0$ tels que

$$\forall z \in I \cap B(a,\delta_n),\ |f_n(z) - \ell_n| < \epsilon$$

et

$$\forall z \in I \cap B(a,\delta_m),\ |f_m(z) - \ell_m| < \epsilon$$

Soit $\delta = \min(\delta_n,\delta_m)$ et soit $z \in I \cap B(a, \min \delta)$. On déduit des trois équations précédentes que

$$|\ell_n - \ell_m| \leq |\ell_n - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - \ell_m| < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

ce qui montre que (ℓ_n) est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet on en déduit qu'elle converge vers une limite ℓ. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |\ell_n - \ell| < \epsilon$$

Par ailleurs, comme (f_n) converge uniformément vers f, il existe N_2 tel que

$$\forall n \geq N_2,\ \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

On fixe $N = \max(N_1,N_2)$. Comme $\lim_{x\to a} f_N(x) = \ell_N$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap B(a,\delta),\ |f_N(x) - \ell_N| < \epsilon$$

On en déduit que pour tout $x \in I \cap B(a,\delta)$ on a

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \ell_N| + |\ell_N - \ell| < 3\epsilon$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.13 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On suppose que la suite* (f_n) *converge uniformément vers une limite* f. *Alors* f *est continue sur* I.

Preuve. Soit $a \in I$. On doit montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. On sait que

- (f_n) converge uniformément vers f
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$ (car f_n est continue)

On peut donc appliquer le théorème de la double limite. On en déduit que $(f_n(a))$ converge vers une limite ℓ et que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Or on sait aussi que $(f_n(a))$ converge vers $f(a)$. Par conséquent, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ce qui montre que f est continue. $\square$

Théorème 3.14 *Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers une limite f. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Comme (f_n) converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/|b-a|$$

On en déduit que pour $n \geq N$, on a

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{|b-a|}dx = \epsilon$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

Théorème 3.15 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

- *la suite (f_n) converge simplement vers une limite f*
- *la suite (f_n') converge uniformément vers une limite g*

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Preuve. Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt$$

Soit $h(x) = \int_a^x g(t)dt$, alors pour tout $x > x_0$

$$|f_n(x) - f_n(x_0) - h(x)| \leq \int_{x_0}^x |f_n'(t) - g(t)|dt < |b-a| \sup_{[a,b]} |f_n' - g|$$

Comme (f_n') converge vers g uniformément, cela montre que $f_n - f_n(x_0)$ converge uniformément vers h sur $[a,b]$. Or $f_n(x_0)$ converge cers $f(x_0)$, donc (f_n) converge vers $f(x_0) + h$. On en déduit

$$f(x) = f(x_0) + h(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

Cette formule montre que f est dérivable de dérivée g. $\square$

3.2 Séries de fonctions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 3.16 *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est la suite de fonctions $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.*

Définition 3.17 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonction. On dit que cette série converge simplement si pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge.*

Définition 3.18 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonction. On dit que cette série converge uniformément la suite de fonctions (S_N) converge uniformément sur I.*

Définition 3.19 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonction. On dit que cette série converge normalement si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_I |f_n|$ converge.*

Théorème 3.20 *La convergence uniforme implique la convergence simple d'une série de fonctions. La convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme de la série.*

Preuve. La première partie est évidente.

Supposons que $\sum f_n$ est une série de fonctions normalement convergente. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. On va montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme. On se donne $\epsilon > 0$. Comme la série converge absolument, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geq N} \sup_{x\in I} |f_n(x)| < \epsilon$$

Supposons que $m \geq n \geq N$ et soit $x \in I$, alors

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{z\in I} |f_k(z)| < \epsilon$$

ce qui prouve le critère de Cauchy uniforme et donc la convergence uniforme de la série. □

Théorème 3.21 (Théorème de la double limite) *Soit $(f_n) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction et soit $a \in \bar{I}$. On suppose que*

i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n lorsque x tend vers a.

Alors, la série $\sum \ell_n$ converge et $\lim_{x\to a} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de la double limite à la suite de fonctions $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. □

Théorème 3.22 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément. Alors la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème correspondant à la suite de fonctions $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. $\square$

Théorème 3.23 *Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément et on note $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\int_a^b f_n(t)dt)$ converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème correspondant à la suite de fonctions $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. $\square$

Théorème 3.24 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

- *la série $\sum f_n$ converge simplement vers une somme f*
- *la série $\sum f'_n$ converge uniformément vers une somme g*

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème correspondant à la suite de fonctions $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. $\square$

Chapitre 4

Séries entières

4.1 Rayon de convergence

Définition 4.1 *On appelle série entière toute série de la forme* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$*, avec* (a_n) *suite de nombres complexes et* $z \in \mathbb{C}$*.*

Lemme 4.2 (Lemme d'Abel) *Soit* (a_n) *suite de nombres complexes, et soit* $z_0 \in \mathbb{C}$*. On suppose que la suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. Alors, pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *converge absolument.*

Preuve. On peut supposer que $z_0 \neq 0$. On a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

avec $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n z_0^n| < \infty$. Comme $|z/z_0| < 1$, alors la série $\sum M|z/z_0|^n$ converge et on peut conclure par théorème de comparaison. □

Définition 4.3 *On appelle rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$*, la quantité*

$$R = \sup\{r \geq 0,\ (a_n r^n) \text{est bornée}\} \in [0, +\infty]$$

Il est clair que la suite $(a_n 0^n)$ est bornée. Donc le rayon de convergence est bien défini.

Proposition 4.4 *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in [0,\infty]$*. Alors, pour tout* $r \in [0,R[$ *la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|z|<r} |a_n z^n|$$

converge.

Preuve. C'est immédiat. □

Théorème 4.5 (Théorème de Cauchy-Hadamard) *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence R. Alors*

1. *si* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0, +\infty]$*, alors* $R = \frac{1}{\ell}$*.*
2. *si* $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in [0, +\infty]$*, alors* $R = \frac{1}{\ell}$*.*

Preuve. Preuve de 1. On suppose d'abord que $\ell \in]0,\infty[$. Considérons la suite (b_n) définie par $b_n = a_n r^n$. Alors $\frac{b_{n+1}}{b_n} = r\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers $\frac{r}{\ell}$ quand $n \to \infty$. Supposons d'abord que $r < \ell$, alors $\frac{r}{\ell} < 1$ et on en déduit que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. En particulier, (b_n) est bornée et donc le rayon de convergence R de la série est donc supérieur à r. Comme ceci est vrai pour tout $r < \ell$, on en déduit que $R \geq \ell$.

Réciproquement, supposons que $r > \ell$, alors la suite (b_n) tend vers $+\infty$ et on en déduit que $R < r$ pour tout $r > \frac{1}{\ell}$. Par suite $R = \frac{1}{\ell}$.

Preuve de 2. Elle est identique et laissée au lecteur. □

4.2 Opérations sur les séries entières

Proposition 4.6 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b et soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum(a_n + b_n)z^n$. Alors*

- *si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a,R_b)$*
- *si $R_a = R_b$ alors $R \geq R_a$.*

Preuve. Par définition, on a bien $R \geq \min(R_a,R_b)$. Supposons maintenant que $R_a < R_b$ et soit $r \in]R_a,R_b[$. Alors $(b_n r^n)$ est bornée alors que $(a_n r^n)$ ne l'est pas. Par conséquent $((a_n + b_n)r^n)$ n'est pas bornée et donc $r > R$. Ceci prouve que $R \leq R_a$. □

Théorème 4.7 *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction $f :]-R,R[\to +\infty$ définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est C^∞ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}z^n$$

où cette dernière série entière a pour rayon de convergence R.

Preuve. On prouve que f est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On procède par récurrence sur k. On commence par traiter le cas $k = 1$. On considère la série entière

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$$

Il est clair que g_1 a même rayon de convergence que f. De plus pour tout $r \in]0,R[$ les séries $f(z)$ et $g_1(z)$ convergent uniformément sur $[-r,r]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries. On en déduit que f est dérivable sur $]-r,r[$ et que $f' = g_1$. Ceci prouve le résultat au rang $k = 1$.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang $k \geq 1$ et montrons que f est C^{k+1}. Par hypothèse de récurrence f est C^k et

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}z^n$$

a pour rayon de convergence R. On peut donc appliquer le cas $k = 1$. On en déduit que $f^{(k)}$ est dérivable et que

$$(f^{(k)})'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+1)(n+k)\dots(n+1)a_{n+k+1}z^n$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.8 *Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve. D'après le théorème précédent, la fonction f est C^∞ et

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}z^n$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $0^n = 0$. Par suite

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}0^n = k(k-1)\dots 1a_k = k!a_k$$

et on conclue en divisant par $k!$. □

4.3 Fonctions développables en séries entières

Définition 4.9 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. On dit que f est développable en série entière en a s'il existe $\delta > 0$ et une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur à δ tels que $]a-\delta,a+\delta[\subset I$ et*

$$\forall z \in]a-\delta,a+\delta[,\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

On notera $f \in DSE(a)$.

On dit que f est développable en série entière sur I si elle est développable en tout point a de I.

Proposition 4.10 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière en $a \in I$ et soit $\delta > 0$ tel que*

$$\forall z \in]a-\delta,a+\delta[,\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Alors f est développable en série entière en tout point c de $]a-\delta,a+\delta[$.

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que $a = 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in]-\delta,\delta[,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On se donne $c \in]-\delta,\delta[$ et $\epsilon > 0$ tel que $]c-\epsilon,c+\epsilon[\subset]-\delta,\delta[$. On peut supposer que $0 \leq c < c+\epsilon < \delta$. Pour $|z| < \epsilon$, on a

$$\begin{aligned} f(c+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c+z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^{n-k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} c^{n-k} \right) z^k \end{aligned}$$

On doit donc montrer que la suite $b_k \epsilon^k$ est bornée, où $b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} c^{n-k}$. Or pour tout $k \leq n$, on a

$$\epsilon^k \binom{n}{k} c^{n-k} \leq \sum_{\ell=0}^{n} \epsilon^\ell \binom{n}{\ell} c^{n-\ell} = (c+\epsilon)^n$$

Par suite $\epsilon^k b_k \leq \sum_{n=k}^{\infty} a_n (c+\epsilon)^n$ qui est le reste d'une série convergente car f est DSE(0). □

Théorème 4.11 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière en 0 et soit $r > 0$ tel que*

$$\forall z \in]-r,r[,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors f est C^∞ sur $]-r,r[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier, les coefficients a_n sont uniques.
Preuve. C'est une conséquence immédiate du Théorème 4.7 et de la Proposition 4.8. □

Remarque 4.12 *Attention, il existe des fonctions C^∞ qui ne sont pas développables en série entière. Par exemple, la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} \ \text{si } x > 0 \end{cases}$$

appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais cette fonction ne peut pas être DSE en 0, sinon on aurait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

pour tout x proche de 0, ce qui est impossible puisque f n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0.

Théorème 4.13 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

Preuve. On procède par récurrence sur n.

Le cas $n = 0$ est une conséquence immédiate du Théorème fondamental de l'Analyse.

Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$ et qu'on a établi la formule:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt. \tag{4.1}$$

Une simple intégration par parties montre que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt &= -[\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1}]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} dt \end{aligned} \tag{4.2}$$

En additionnant les equations (4.1) et (4.2), on obtient le résultat au rang $n+2$.
□

Théorème 4.14 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ et soit $x_0 \in I$. Alors f est DSE en x_0 si et seulement si il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt = 0$$

Preuve.

□

Corollaire 4.15 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leq M^n$$

Alors f est DSE sur I.

Exemple 4.16 *Les fonction* sin *et* cos *sont DSE sur $\mathbb{R}$.*