CPBX 2021-22
Analyse 2
Université de Bordeaux

Devoir Maison

(à rendre avant le 24/09/2020)

On pourra utiliser la fiche de révision :
https ://www.math.u-bordeaux.fr/ lamichel/docu_enseign/CPBX/RappelsOrdreGrandeur.pdf

Exercice 1 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+2x^4}{1+x^4},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1+n+2n^4}{1+n^4},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n\ln(n))}{\ln(n)},\quad \lim_{x\to 0}\arctan(\ln(x))$$

Exercice 2 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3},\quad \lim_{n\to+\infty}n^2\ln(\frac{n+1}{n})-n,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x\cos(x)}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin(x))-\cos(x)}{x^4}$$

Exercice 3 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n,\quad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^n,\quad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n^3})^{n^2},\quad \lim_{n\to+\infty}(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))^n,$$

Exercice 4 *Soit $a>0$ un réel. On considère la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$ et la suite (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{R}^*$ et*

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1. *Montrer que pour tout $x>0$, on a bien $f(x)>0$. En déduire que (u_n) est bien définie.*
2. *Étudier les variations de f et tracer son graphe.*
3. *Quelle est l'unique limite éventuelle pour la suite (u_n) ?*
4. *On suppose $u_0>0$ et on veut montrer que (u_n) converge.*
   (a) *Que se passe-t-il si $u_0=\sqrt{a}$?*
   (b) *On suppose désormais que $u_0\neq\sqrt{a}$. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $u_n>\sqrt{a}$.*
   (c) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.*
   (d) *Conclure.*
5. *On cherche maintenant à préciser la vitesse de convergence.*
   (a) *Montrer que pour tout $n\geq 0$, on a $u_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2u_n}(u_n-\sqrt{a})^2$*
   (b) *Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$*
   $$u_{n_0}-\sqrt{a}\leq 2\sqrt{a}$$
   (c) *Montrer que pour tout $n\geq n_0$*
   $$0<(u_n-\sqrt{a})\leq 2\sqrt{a}\Big(\frac{u_{n_0}-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\Big)^{2^{n-n_0}}.$$
   (d) *On suppose $a=1$ et $u_0=2$. Déterminer $n_1\in\mathbb{N}$ tel que*
   $$\forall n\geq n_1,\ |u_n-1|<10^{-123}$$