CPBX 2018-19
ANALYSE 2
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Devoir surveille n° 1

Exercice 1 *Discuter selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ de la convergence de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^a}{(2n)!}.$$

Exercice 2 *On considère la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+3(-1)^{n^3+1}} \tag{1}$$

1. *Expliquez pourquoi le critère de convergence des séries alternées ne s'applique pas*
2. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\frac{(-1)^n}{2n+3(-1)^{n^3+1}} = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

3. *La série définie par (1) est elle convergente?*

Exercice 3 *Soit (u_n) une suite numérique. On suppose que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ convergent.*

1. *Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n\geq 0} u_n^\alpha$ converge.*
2. *Montrer que $\sum_{n\geq 0} \sin(u_n)$ converge.*

Problème

Partie 1 Dans cette première partie, on s'intéresse aux restes des séries de Riemann.

1. Rappeler sans démonstration la valeur $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $\alpha > \alpha_0$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
2. On suppose que $\alpha > \alpha_0$. Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt \tag{2}$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 2$, la série $\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge et que

$$\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \tag{3}$$

4. En déduire un équivalent quand $n \to \infty$ de la suite $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Partie 2 Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soient $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n} = H_n - \ln(n) - \frac{1}{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Indication. On pourra utiliser l'inégalité: $x \geq \ln(1+x), \forall x > -1$
2. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune γ.
3. Soit $r_n := u_n - \gamma$. Montrer que $r_n - r_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$ quand $n \to \infty$.
4. En déduire que
$$r_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \text{ quand } n \to \infty$$
5. Conclure que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$