CPBX 2019-20
Analyse 2
Université de Bordeaux

Devoir surveille n° 1

Durée: 1h30.
Les documents et matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 *Déterminer la nature des séries suivantes*

$$a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)^{n^3}}{n^2},\quad b)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\quad c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots 2n}$$

$$d)\ \sum_{n\geq 2}\sin\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big),\quad e)\ \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$$

Exercice 2 *Pour tout $a>0$, on considère la fonction $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{a}{a^2+k^2}$.*

1. *Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{a}{a^2+k^2}$ converge. On notera $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{a^2+k^2}$ sa somme.*
2. *Montrer que la fonction f_a est décroissante*
3. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a*
$$\arctan\Big(\frac{n+1}{a}\Big) \leq S_n(a) \leq \arctan\Big(\frac{n}{a}\Big) + \frac{1}{a}.$$
4. *Montrer que $\lim_{a\to+\infty} S(a) = \frac{\pi}{2}$.*

Exercice 3 *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie K de E est dite convexe si elle vérifie la propriété suivante:*

$$\forall x,y \in K,\ \forall t \in [0,1],\ tx+(1-t)y \in K$$

1. *Montrer que la boule $\overline{B}(0,1) = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est convexe.*
2. *On suppose que E n'est pas réduit à $\{0\}$. L'ensemble $E \setminus \overline{B}(0,1)$ est il convexe?*
3. *On suppose maintenant que $K \subset \mathbb{R}^d$ est un convexe borné.*
   (a) *On suppose qu'il existe $r>0$ tel que $B(0,r) \subset K$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble $A(x) := \{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in K\}$ est non vide. En déduire que $x \in \mathbb{R}^d \mapsto N(x) = \inf A(x)$ définit une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.*
   (b) *On suppose en plus que K est symétrique par rapport à l'origine, c'est à dire que $x \in K \Longrightarrow -x \in K$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^d$.*