CPBX 2020-21
Analyse 2
Université de Bordeaux

Devoir Surveillé no1

Documents et matériels électroniques interdits.

Exercice 1 *Calculer les limites suivantes :*

$$i) \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2 - x^2}{x^4}, \ ii) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(\cos(x)))}{x^2}, \ ii) \lim_{n\to+\infty} \left(n\sin(\frac{1}{n})\right)^{n^2}$$

Exercice 2 *Déterminer la nature de chacune des séries suivantes :*

$$i) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n} + \ln(n)}, \ ii) \sum_{n\geq 2} \frac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}, \ iii) \sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}), \ iv) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\sin(n)},$$

Exercice 3 *Soit $a > 0$ et soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.*

1. *Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque $n \to +\infty$.*
2. *On veut déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ selon les valeurs de a.*
   (a) *On suppose que $a \neq e$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.*
   (b) *On suppose maintenant que $a = e$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?*

Exercice 4 *Soit $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $N_k(x) = \sum_{j=1}^d \frac{|x_j|}{j^k}$.*

1. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k est une norme sur E.*
2. *On suppose dans cette question que $d = 2$. Dessiner la boule unité pour la norme N_2.*
3. *Soient k et l des entiers, montrer que N_k et N_l sont équivalentes.*
4. *On suppose que $d = 2$. Montrer que l'ensemble*
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ -1 < y < 1\}$$
est ouvert pour la norme N_2.

Exercice 5 *Soit $g : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x\ln(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ et $S_n = \sum_{k=3}^n u_k$.*

1. *Etudier les variations de g et tracer son graphe.*
2. *Pour tout $n \geq 2$, calculer $\int_2^n \frac{1}{g(x)}dx$.*
3. *Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a*
$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{g(x)}dx \leq u_k$$
4. *En déduire que pour tout $n \geq 3$, on a*
$$\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(3)}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)$$
5. *Montrer que $\ln(\ln(n+1)) \simeq \ln(\ln(n))$ quand $n \to \infty$.*
6. *Montrer que $S_n \simeq \ln(\ln(n))$ quand $n \to \infty$.*