CPBX 2019-20
Analyse 2
Université de Bordeaux

Devoir surveillé n° 2

Durée: 1h30.

Les documents et matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = nx^3 e^{-nx^2}$.

1. *Montrer que la suite* f_n *converge simplement vers une limite* f *que l'on identifiera.*
2. *La convergence est elle uniforme?*
3. *Soit* $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. *Calculer* $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 2 *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = (x+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}}$.

1. *Montrer que pour tout* $a,b \in \mathbb{R}_+$, $(a+b)^{\frac{1}{3}} \leq a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$
2. *Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément vers une fonction limite* f *que l'on identifiera.*

Exercice 3 *Soient* E,F *deux evn et soit* $u : E \to F$ *une application linéaire. On suppose que* u *transforme tout ouvert de* E *en un ouvert de* F.

1. *Montrer que* $0 \in u(B(0,1))$.
2. *Montrer qu'il existe* $r > 0$ *tel que* $B(0,r) \subset u(B(0,1))$.
3. *En déduire que* u *est surjective.*
4. *On suppose en plus que* u *est injective. Montrer que* u *est bijective et que* u^{-1} *est continue.*

Exercice 4 *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$ *l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réels. Pour tout* $P = \sum_{j=0}^{deg(P)} a_j X^j$, *on définit*

$$N_0(P) = \sum_{j=0}^{deg(P)} |a_j|, \text{ et } N_1(P) = \sum_{j=0}^{deg(P)} 2^j |a_j|$$

1. *Montrer que* N_0 *et* N_1 *définissent des normes sur* E.
2. *Les normes* N_0 *et* N_1 *sont elles équivalentes?*
3. *Soit* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(P) = P(1)$. *Montrer que* φ *est linéaire continue de* (E,N_0) *dans* $(\mathbb{R},|.|)$ *et calculer* $\|\varphi\|_{(E,N_0)\to(\mathbb{R},|.|)}$.
4. *Montrer que l'ensemble* $A = \{P \in E,\, P(1) + P(-1) < 0\}$ *est un ouvert de* (E,N_0).
5. *Soit* $\psi : E \to \mathbb{R}$ *définie par* $\psi(P) = P(2)$. *L'application* ψ *est elle continue de* (E,N_0) *dans* $(\mathbb{R},|.|)$*?*
6. *En étudiant la suite* (P_n) *de polynômes définis pas* $P_n(X) = 2^{-n}X^n$, *montrer que l'ensemble* $B = \{P \in E,\, P(2) = 1\}$ *n'est pas fermé dans* (E,N_0).
7. *Montrer que* ψ *est continue de* (E,N_1) *dans* $(\mathbb{R},|.|)$. *Que peut on en déduire sur l'ensemble* B*?*