CPBX 2021-22
ANALYSE 2
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

RAPPELS SUR LES ORDRES DE GRANDEURS, RELATIONS DE COMPARAISONS ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1 Relations de comparaison

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Dans ce document on veut formaliser l'observation suivante. Considérons les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. On sait que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Cependant, on peut se demander laquelle de ces deux fonctions tend le plus vite vers 0 quand x tend vers 0. On peut commencer par évaluer f et g pour de valeurs "petites" :

x	0.1	0.01	10^{-3}
$f(x)$	0.1	0.01	10^{-3}
$g(x)$	0.01	0.0001	10^{-6}

On constate que lorsque x tend vers 0, $g(x)$ *est beaucoup plus petit que* $f(x)$.

Une autre manière d'appréhender ce phénomene est de calculer la limite quand x tend vers 0 de $\frac{g(x)}{f(x)}$. On constate que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Ceci confirme que lorsque x s'approche de 0 le quotient $\frac{g(x)}{f(x)}$ devient très petit. Autrement dit, $g(x)$ *est beaucoup plus petit que* $f(x)$.

Définition 1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On dira que "f est un grand O de g lorsque x tend vers x_0" si :*

$$\exists C \geq 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,\ |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

On notera

$$f(x) = \mathcal{O}_{x_0}(g(x)).$$

Exercice 1 *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathcal{O}_{x_0}(1)$. Montrer que $f(x) = \mathcal{O}_0(x)$.*

2. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x} + x - 2$. Montrer que $f(x) = \mathcal{O}_1((x-1)^2)$.

Définition 2 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On dira que "f est un petit o de g lorsque x tend vers x_0" si il existe $\delta > 0$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$ et*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,\ |f(x)| = \epsilon(x)|g(x)|$$

On notera

$$f(x) = o_{x_0}(g(x)).$$

Exercice 2 *1. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Montrer que $f(x) = o_0(x)$.*

2. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)\ln(x)$. Montrer que $f(x) = o_0(x-1)$.

Remarque 1 *Avec les notations précédentes, dire que $f = o_{x_0}(1)$ (où 1 désigne la fonction constante égale à 1) signifie exactement que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

Proposition 1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. Alors $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,\ |f(x)| < \epsilon|g(x)|.$$

Preuve. Il suffit d'écrire la définition de $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$ pour obtenir l'équivalence. □

Corollaire 1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. Supposons $f(x) = o_{x_0}(g(x))$, alors $f(x) = O_{x_0}(g(x))$.*

Proposition 2 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ et $k : I \to \mathbb{R}$ quatre fonctions $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. on a les implications suivantes :*

1. *Si $f = o_{x_0}(g)$ et $h = o_{x_0}(g)$ alors $f + h = o_{x_0}(g)$.*
2. *Si $f = o_{x_0}(g)$ et $h = \mathcal{O}_{x_0}(k)$ alors $f.h = o_{x_0}(g.k)$.*
3. *Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(g)$ et $h = \mathcal{O}_{x_0}(g)$ alors $f + h = \mathcal{O}_{x_0}(g)$.*
4. *Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(g)$ et $h = \mathcal{O}_{x_0}(k)$ alors $f.h = \mathcal{O}_{x_0}(g.k)$.*

Preuve. Laissée en exercice. □

Remarque 2 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ *et* $h : I \to \mathbb{R}$ *trois fonctions et* x_0, x_1 *deux réels. Si* $x_0 \neq x_1$, *aucune des règles précédentes de s'applique. Par exemple on a* $x^2 = o_0(x)$, $\frac{1}{x} = \mathcal{O}_1(x)$ *et* $x^2.\frac{1}{x} = x \neq o_0(x^2)$.

Définition 3 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $x_0 \in I$. *On dit que* f *est équivalente à* g *en* x_0 *si* $f - g = o_{x_0}(g)$. *On notera* $f \sim_{x_0} g$.

Proposition 3 *La relation* $\sim_{x_0}$ *est une relation d'équivalence.*

Preuve. Laissée en exercice. □

Exercice 3 *Soient* f_1, f_2, g_1, g_2 *des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $x_0 \in I$. *On suppose que* $f_1 \sim_{x_0} g_1$ *et* $f_2 \sim_{x_0} g_2$. *Montrer que* $f_1 f_2 \sim_{x_0} g_1 g_2$.

Proposition 4 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $x_0 \in I$. *On suppose que la fonction* g *ne s'annule pas lorsque* x *est proche de* x_0. *Alors*

$$f \sim_{x_0} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}^*$ *alors* $f \sim_{x_0} \ell$ *ssi* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

1.2 Cas des fonctions puissances

Dans cette partie, on compare la taille des fonctions puissances. On fixe un intervalle I et $x_0 \in I$ et pour $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 5 *Soient* $k \in \mathbb{N}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$, *alors*

1. $f = o_{x_0}((x - x_0)^k)$ *ssi* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} = 0$.
2. $f = \mathcal{O}_{x_0}((x - x_0)^k)$ *ssi* $\frac{f(x)}{(x - x_0)^k}$ *est bornée "près de* x_0*".*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des définitions. □

2 Formule de Taylor et développements limités

Dans toute cette partie $I =]a, b[$ est un intervalle, $x_0 \in I$ est fixé et $f : I \to \mathbb{R}$ est une application.

Théorème 1 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Supposons que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, *alors pour tout* $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R(x)$$

avec

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

Preuve. On procède par récurrence sur n.

Le cas $n = 0$ est une conséquence immédiate du Théorème fondamental de l'Analyse.

Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$ et qu'on a établi la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt. \tag{1}$$

Une simple intégration par parties montre que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt &= -[\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1}]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} dt\end{aligned} \tag{2}$$

En additionnant les equations (1) et (2), on obtient le résultat au rang $n+2$. □

Corollaire 2 (Formule de Taylor-Lagrange) *Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + {}_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$$

Définition 4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in I$. On dit que f a un développement limité à l'ordre n en x_0 ($DL_n(x_0)$) s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \tag{3}$$

pour $x \in I$. Si une fonction f a un $DL_n(x_0)$ pour tout n, on dit que la fonction f a un développement limité a tout ordre en x_0.

Proposition 6 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in I$. On suppose que f a un $DL_n(x_0)$. Alors les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont uniques.*

Théorème 2 *Soit f une fonction de classe C^n sur I. Alors, pour tout $x_0 \in I$, f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \tag{4}$$

Preuve. C'est une consquence immédiate de la formule de Taylor-Lagrange. □

Proposition 7 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux applications et $x_0 \in I$. On suppose que f et g ont un $DL_n(x_0)$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \end{aligned} \tag{5}$$

Alors

i) **(Somme de DL)** *La fonction $f + g$ a un $DL_n(x_0)$:*

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + \ldots + (a_n + b_n)(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

ii) **(Produit de DL)** *La fonction fg a un $DL_n(x_0)$:*

$$\begin{aligned} (fg)(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)(x - x_0) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)(x - x_0)^2 \\ + \ldots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_0b_n)(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \end{aligned} \tag{6}$$

iii) **(Inverse de DL)***Si $f(x_0) = 0$ et f possède un $DL_n(x_0)$, alors $\frac{1}{1-f}$ possède un $DL_n(x_0)$. Ce DL_n est identique à celui de la fonction $\sum_{k=0}^{n} f^k$ qui se calcule avec les regles i) et ii).*

iv) **(Composition de DL)** *Soient I et J deux intervalles et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On se donne $x_0 \in I$ et on suppose que $y_0 = f(x_0)$ appartient à J. On suppose aussi que f a un $DL_n(x_0)$ et g a un $DL_n(y_0)$ et que ces DL sont donnés par*

$$f(x) = P_n(x-x_0)+o_{x_0}((x-x_0)^n) \text{ et } g(y) = Q_n(y-y_0)+o_{y_0}((y-y_0)^n).$$

Alors $g \circ f$ a un $DL_n(x_0)$ qui s'obtient en calculant le $DL_n(x_0)$ de $Q_n(P_n(x - x_0) - y_0)$.