CPBX 2019-20
Analyse 2
Université de Bordeaux

Feuille 1: Rappels sur les suites numériques

Exercice 1 *Soit (u_n) une suite numérique.*

1. *Rappeler la définition de la convergence de u_n vers une limite ℓ.*
2. *A l'aide de la définition précédente, montrer que la suite $u_n = \frac{1}{2n^2}$ converge vers 0.*
3. *Rappeler la définition d'une suite bornée. Montrer que toute suite convergente est nécessairement bornée.*

Exercice 2 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe.*

1. *Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent aussi vers la même limite.*
2. *Réciproquement, on suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent aussi vers la même limite. À l'aide de la définition de la limite, montrer que (u_n) converge aussi.*

Exercice 3 *On considère une suite réelle croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que (u_{2n}) est convergente. Est-il vrai que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?*

Exercice 4 *Soit $a > 0$ un réel. On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$$

1. *On suppose que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ell = \sqrt{a}$.*
2. *On suppose $u_0 > 0$ et on veut montrer que (u_n) converge.*
   (a) *Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n > \sqrt{a}$.*
   (b) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.*
   (c) *Conclure.*
3. *On prend $a > 1$.*
   (a) *Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$*
   (b) *Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \leq 1 + \frac{\ln(u_0 - \sqrt{a})}{\ln 2}$ et*
   $$u_{n_0} - \sqrt{a} \leq 1$$
   (c) *Montrer que pour tout $n \geq n_0$*
   $$(u_n - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}.$$

Exercice 5 *1. Montrer que* $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos(n)\sin(1)$.

2. *En déduire que si* $(\sin(n))$ *est une suite convergente alors* $(\cos(n))$ *converge vers* 0.
3. *À l'aide d'une démarche similaire, montrer que si* $(\cos(n))$ *est convergente alors* $(\sin(n))$ *converge vers* 0.
4. *En déduire que la suite* $(\sin(n))$ *ne peut pas être convergente.*
5. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0} \sin(n)$ *diverge.*

Exercice 6 (Moyenne de Cesaro). *Soit* (u_n) *une suite numérique convergeant vers une limite* ℓ. *Montrer que la suite* (v_n) *définie par*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

converge aussi vers ℓ. *Réciproquement, si la suite* (v_n) *converge, la suite* (u_n) *est elle convergente?*

Exercice 7 *Soit* (u_n) *une suite numérique telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \ell \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

Exercice 8 *Soit* (u_n) *une suite numérique telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$$

et

$$\lim_{n\to\infty} n(u_k - u_{k-1}) = 0$$

1. *Montrer que*
$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = nu_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$
2. *En déduire que* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.