CPBX 2018-19
Analyse 2
Université de Bordeaux

Feuille 2: Séries numériques

Exercice 1 *Soit* $S_n = 1 + 2 + ... + n$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Calculer* S_n *pour tout* n.

Exercice 2 *Calculer les sommes partielles des séries* $\sum u_n$ *avec* u_n *donnée ci-dessous. En déduire si la série converge et dans ce cas calculer sa somme.*

$$a)\ u_n = e^{in}, \quad b)\ u_n = 1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{n+1}, \quad n \geq 1, \quad c)\ u_n = \sin(n)$$

$$d)\ u_n = \frac{1}{(n-1)(n+2)}, n \geq 2 \quad e)\ u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}), n \geq 2$$

Exercice 3 *Soit* (u_n) *une suite numérique. Montrer que si* $\sum_{p\geq 0} u_{2p}$ *converge, et* $\sum_{p\geq 0} u_{2p+1}$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*

Exercice 4 *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente à termes positifs. Montrer que* $\sum u_n^2$ *est aussi convergente (indication : on pourra comparer* u_n *et* u_n^2 *quand* $n \to +\infty$*)*

Exercice 5 *Soit* (u_n) *une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général* u_n *converge. Montrer que* $u_n = o(\frac{1}{n})$. *Trouver un exemple de suite* (u_n) *de réels strictement positifs telle que la série de terme général* u_n *converge mais telle que la suite de terme général* nu_n *ne tende pas vers 0.*

Exercice 6
1. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $I_N = \int_1^N x^a dx$. *Discuter selon la valeur de* a *de l'existence de* $\lim_{N\to\infty} I_N$.
2. *Soit* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose qu'il existe* $a > 1$ *et* $C > 0$ *tels que* $|f(x)| \leq Cx^{-a}$. *Que peut on dire de* $I_N(f) = \int_1^N f(x)dx$ *?*
3. *Meme question si on suppose maintenant que* $f(x) \geq Cx^{-a}$ *avec* $a \leq 1$ *?*

Exercice 7 *Déterminer la nature des séries de terme général*

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}}, \qquad \frac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}, \qquad \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \frac{n^n}{2^{n^2}}, \qquad \frac{n!}{n^n}, \qquad \frac{n^n}{(2n)!}$$

Exercice 8 *Soient* $a,b \in \mathbb{R}$. *Pour* $N \in \mathbb{N}$, *soit*

$$I_N(a,b) = \int_1^N \frac{1}{x^a \ln(x)^b} dx.$$

Discuter de l'existence de $\lim_{N\to\infty} I_N$ *en fonction de* a *et* b.

Exercice 9 (Séries de Bertrand) *Etant donnés deux réels* a *et* b, *on considère la série* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$.

1. *On suppose* $a = 1$. *En utilisant le théorème de comparaison avec une intégrale, montrer que la série converge si et seulement si* $b > 1$.

2. *On suppose $a \neq 1$. En comparant cette série à une série de Riemann, montrer qu'elle converge si et seulement si $a > 1$*

Exercice 10 *1. Montrer l'inégalité suivante : pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ on a $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$*
b) Démontrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes ‡ termes positifs, alors $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est une série convergente.

Exercice 11 *Etudier la nature des séries suivantes*

$$\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}, \quad \sum e^{-n^2\sin(1/n)} - 1, \quad \sum \left(\sum_{k=0}^{17} \sin\left(\frac{2\pi k}{n^2}\right)\right), \quad \sum \left(n\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{2n}{2n+1}\right)$$

Exercice 12 *Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$. Plus généralement, peut on trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?*

Exercice 13 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

1. *Pour tout $n \geq 1$, montrer que $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$. En déduire le comportement de (S_n) quand $n \to \infty$.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = S_n - \ln(n)$ et $V_n = S_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une limite commune $\gamma \in [\frac{1}{2},1]$ (cette limite s'appelle la constante d'Euler).*

Exercice 14 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^\alpha}$*

Exercice 15 *Etudier la nature des séries suivantes:*

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1 + (-1)^n\sqrt{n}}{n}, \quad \sum_{n\geq 2} (-1)^n \sqrt{n} \ln\frac{n+1}{n-1}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(e - (1+\frac{1}{n})^n\right), \quad \sum_{n\geq 2} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n}), \quad \sum_{n\geq 1} \sin\frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$$

Exercice 16 *Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{(-1^n + \sqrt{n}}$. Montrer que (u_n) et (v_n)sont équivalentes quand $n \to \infty$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont elles de même nature?*

Exercice 17 *Soit $a \in]0,1[$. Ecrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} ka^k$.*

Exercice 18 (Transformation d'Abel) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose que: (S_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite décroissante tendant vers 0. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$,*

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} v_{n+k} = v_{n+p} S_{n+p} - v_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) S_k$$

   Indication: écrire $u_k = S_k - S_{k-1}$

2. *Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n,p \geq 1$, $|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} v_{n+k}| \leq M v_{n+1}$*
3. *En déduire que la série $\sum u_n v_n$ converge*
4. *Soit $\alpha \in]0,2\pi[$. Montrer que la série $\sum \frac{\cos(n\alpha)}{\sqrt{n}}$ converge.*