CPBX 2020-21
Analyse 2
Université de Bordeaux

Feuille 3: Espaces vectoriels normés

Exercice 1 *Sur l'espace des polynômes* $\mathbb{K}[X]$ *on définit* $N(P) = \sup\{|a_k|,\, k = 0, \dots, K\}$, $P(X) = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$. *Montrer que* N *est une norme. Pouvez vous en donner d'autres?*

Exercice 2 *Dans* $\mathbb{R}^d$ *avec* d = 2, *dessiner les boules unités pour les trois normes suivantes:*

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|,\ \|x\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ \|x\|_\infty = max_{j=1}^{d} |x_j|$$

Montrer que ces normes sont équivalentes.

Exercice 3 *Soit* $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *l'application définie par*

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ N(u) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

Montrer que N *est une norme et dessiner la boule unité.*

Exercice 4 *Soit* $[a,b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$. *Sur* $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *on considère les normes suivantes:*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|.$$

Les normes $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont elles équivalentes?*

Exercice 5 *Soient* $a \in E$ *et* $r > 0$.

1. *Montrer que* $B(a,r)$ *est ouverte et* $\overline{B}(a,r)$ *est fermée.*
2. *Montrer que* $\bar{B}(a,r)$ *est l'adhérence de* $B(a,r)$ *et* $B(a,r)$ *est l'intèrieur de* $\bar{B}(a,r)$.

Exercice 6 *Les ensembles suivants sont ils ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre?*

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y \geq 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\}$
ii) $\{2^{-n},\, n \in \mathbb{N}\}$ *comme sous ensemble de* $\mathbb{R}$
iii) $\{2^n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *comme sous ensemble de* $\mathbb{R}$
iv) l'ensemble $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$.
v) $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0,0)\}$ *comme sous ensemble de* $\mathbb{R}^2$

Exercice 7 *Soit* $(E, \|\|)$ *un evn et soit* (u_n) *une suite convergeant vers une limite* $\ell \in E$. *Montrer que l'ensemble* $F = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ *est fermé.*

Exercice 8 *Les ensembles suivants sont ils ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre?*

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq y \leq 1\}$
ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ -\frac{1}{x} < y < \frac{1}{x}\}$

Exercice 9 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé et soit* F *un sous-espace vectoriel de* E.

1. *Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *On suppose que F est un sous-espace strict de E (i.e. $F \neq E$). Montrer que $\mathring{F} = \emptyset$.*

Exercice 10 *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de E. Pout tout $x \in A$, on définit $d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$.*

1. *Montrer que $d(x,A)$ est bien définie.*
2. *Montrer que si A est fermé alors $d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in A$.*

Exercice 11 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\|x\|_1 = \sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x,y\rangle|$.*

Exercice 12 *Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout ensemble A on appelle diamètre de A le nombre $\delta(A) := \sup\{\|x-y\|, x \in A, y \in A\} \in [0,+\infty]$. Soit (F_n) une suite de fermés de E et soit $\delta_n = \delta(F_n)$. On suppose que*

i) La suite (F_n) est décroissante pour l'inclusion

ii) la suite δ_n tend vers 0

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$. Dans la suite on note $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

1. *En choisissant un élément x_n dans chaque F_n, montrer que Fcontient au moins un élément x.*
2. *Montrer que F ne peut pas contenir d'autre élément que x.*

Exercice 13 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$. Montrer que f est continue.*

Exercice 14 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Montrer que les applications $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soient $a,b \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\lim_{t\to 0} f(ta,tb)$. Que peut on en déduire?*

Exercice 15 *Soit E un evn complet et soit F un fermé de E. On suppose que $f : F \to F$ est une application contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in]0,1[$, tel que*

$$\forall x,y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique $x \in F$ tel que $f(x) = x$.

1. *Montrer que f est continue.*
2. *Montrer que si x existe, il est unique.*
3. *Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, f^p est k^p-contractante.*
4. *Soit $x_0 \in F$ et soit (x_n) la suite de F définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout $n,p \in \mathbb{N}$, on a*
$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$
5. *En déduire que la suite (x_n) converge vers une limite $x \in F$ et que $f(x) = x$.*