CPBX 2020-21
Analyse 2
Université de Bordeaux

Feuille 4: Applications linéaires continues

Exercice 1 *Soit $E=\mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et l'application linéaire définie par $\psi(M)=AM$. Calculer la norme de $\psi:(E,\|.\|_j)\to(E,\|.\|_j)$ pour $j=1$ et $j=\infty$. Calculer ensuite la norme de $\psi:(E,\|.\|_1)\to(E,\|.\|_\infty)$*

Exercice 2 *Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A=(a_{ij})$, on définit $\|A\|_1=\sum_{i,j=1}^n|a_{i,j}|$.*
1. *Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur E.*
2. *Soit $\phi:E\to E$ l'application définie par $\phi(M)=M^t$. Montrer que ϕ est linéaire, continue et calculer sa norme.*
3. *Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de E.*
4. *Montrer que l'application trace $tr: M\mapsto tr(M)$ est continue et calculer sa norme.*

Exercice 3 *Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vue comme application linéaire $A:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$.*
1. *On munit $\mathbb{K}$ de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\|A\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$.*
2. *On munit $\mathbb{K}$ de la norme $\|.\|_1$. Montrer que la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\|A\|=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$.*
3. *On munit $\mathbb{K}$ de la norme $\|.\|_2$. Montrer que la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\|A\|\le\left(\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.*

Exercice 4 *Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $tr:E\to\mathbb{R}$. Montrer que tr est continue et calculer sa norme lorsque E est muni de chacune des normes suivantes*

$$\|(a_{ij})\|_\infty=\max|a_{i,j}|,\ \|(a_{ij})\|_1=\sum|a_{i,j}|,\ \|(a_{ij})\|_2=(\sum|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $u:E\to\mathbb{K}$ une forme linéaire. Montrer que u est continue si et seulement si son noyau est fermé.*

Exercice 6 *Soit $E_N=\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus N, muni de la norme $\|P\|=\sum_{j=0}^N|a_j|$, $P=\sum_{j=0}^N a_jX^j$.*
1. *Montrer que l'application $\varphi:P(X)\mapsto P(X+1)$ est linéaire continue sur E_N et calculer sa norme.*
2. *Cette application est elle continue sur $\mathbb{R}[X]$?*
3. *Même questions avec l'application de dérivation $P\mapsto P'$.*

Exercice 7 *Soit $(E,\langle.\rangle)$ un espace prehilbertien et soit $a\in E$. Montrer que la forme linéaire $\varphi_a: x\mapsto\langle a,x\rangle$ est continue et calculer sa norme. Montrer ensuite que l'ensemble $a^\perp=\{x\in E,\ \langle a,x\rangle=0\}$ est un fermé de E.*

Exercice 8 *Soit* $E : \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f|$. *On considère la forme linéaire*

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt.$$

Montrer que φ *est continue et calculer sa norme.*

Exercice 9 *Soient* E *un evn de dimension finie et soit* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des projecteurs de* E. *Montrer que* $\mathcal{P}$ *est un fermé de* $\mathscr{L}_c(E)$.

Exercice 10 *Soient* E,F *deux evn et soit* $u : E \to F$ *une application linéaire. On suppose que* u *transforme tout ouvert de* E *en un ouvert de* F. *Montrer que* u *est surjective.*

Exercice 11 *Soit* E *un evn complet et soit* F *un fermé de* E. *On suppose que* $f : F \to F$ *est une application* k*-contractante pour un certain* $k \in]0,1[$, *c'est à dire*

$$\forall x,y \in F, \ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique $x \in F$ *tel que* $f(x) = x$.

1. *Montrer que si* x *existe, il est unique.*
2. *Montrer que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, f^p *est* k^p*-contractante.*
3. *Soit* $x_0 \in F$ *et soit* (x_n) *la suite de* F *définie par* $x_{n+1} = f(x_n)$. *Montrer que pour tout* $n,p \in \mathbb{N}$, *on a*
$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$
4. *En déduire que la suite* (x_n) *converge vers une limite* $x \in F$ *et que* $f(x) = x$.