CPBX 2018-19
ANALYSE 2
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Feuille 4: Suites et séries de fonctions

Exercice 1 *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2 1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, étudier la limite de $(1 + a/n)^n$ quand $n \to +\infty$.*

2. *Pour tout entier non nul n on considère la fonction f_n de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par:*

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & x \in [0,n] \\ 0 & x \in]n, +\infty[\end{cases}$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

3. *La convergence est elle uniforme?*

Exercice 3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par: $f_n(x) = nx\, e^{-nx} + \sin x$.*

1. *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.*
2. *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.*
3. *Étudier si l'on a convergence uniforme sur les intervalles $[b, +\infty[$ avec $b > 0$.*

Exercice 4 *Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par: $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$.*

1. *Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.*
2. *Déterminer $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$.*
3. *La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?*
4. *Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.*

Exercice 5 *Etudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ puis calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.*

Exercice 6 *Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x^n(1 - x)$.*

1. *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).*
2. *Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.*

Exercice 7 *On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

a) pour tout $a \in [0,1[$, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,a]$.
b) on a $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

1. *Pour tout $\varepsilon \in]0,2[$, prouver que l'on a*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \int_0^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} |f_n(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. *Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x)|dx = 0$.*
3. *Application : examiner le cas $f_n(x) = e^{-n\sin(x)}$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$? Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$?*

Exercice 8 *On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Est-ce que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Montrer que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.
3. *On pose* $S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$ *et* $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$. *Montrer que la suite de fonctions* (S_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* S.

Exercice 9 *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *On pose* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^{k+\frac{3}{2}}}$. *Montrer que* f *définit une fonction de classe* C^k *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 10 *Montrer que la fonction* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n^n}$ *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 11 *Soit* $f :\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-e^{-x})^n}{n^2}$. *On note aussi* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k^2}$.

1. *Montrer que* f *est définie sur* $[-\ln(2), +\infty[$, *continue sur* $[-\ln(2), +\infty[$ *et déterminer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. *On s'intéresse maintenant à la dérivabilité de* f. *Prouver que pour tous réels* $-\ln(2) < a < 0 < b$, *la fonction* f *est dérivable sur* $[a,b]$. *En déduire que* f *est dérivable sur* $]-\ln(2), +\infty[$.

Exercice 12 *On étudie la série de fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ *avec* $f_n(x) = xe^{-nx}/\ln(n)$ *pour tout* $n \geq 0$.

1. *Montrer que la série converge normalement sur tout intervalle de la forme* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$. *Y a-t-il convergence normale sur* $\mathbb{R}^+$ *?*
2. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *et tout* $n \geq 2$, *on a*

$$|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)| \leq \int_n^\infty \frac{xe^{-tx}}{\ln(t)} dt$$

3. *En déduire que la série* $f(x)$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}^+$.
4. *Montrer que* f *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
5. *Montrer que* f *n'est pas dérivable à droite en* 0.

Exercice 13 *On considère la fonction* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. *Montrer que* f *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Rappeler la majoration du reste dans le théorème de convergence des séries alternées.*
3. *Montrer que* f *se prolonge par continuité en* $x = 0$.

Exercice 14 *Soit* $a > 0$.

1. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{an}}{1+t^a} dt = 0$.
2. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{1+ka} = \int_0^1 t^{ka} dt$.
3. *Déduire des questions précédentes que* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^a} dx$

Exercice 15 (Etude de la fonction ζ de Riemann) *On considère la fonction* ζ *définie par* $\zeta :\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1. *Etudier le domaine de définition, la continuité, la limite en* $+\infty$.
2. *Montrer que* ζ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]1, +\infty[$ *et calculer ses dérivées successives.*
3. *Etude en* 1^+. *Montrer que:* $\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$. *Indication : on pourra remarquer que la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ *est monotone quand* t *parcourt* $[1, +\infty[$ *et effectuer une comparaison série-intégrale de* $\frac{1}{n^x}$ *avec* $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ *et* $\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.