CPBX 2018-19
ANALYSE 2
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Corrigé de l'examen

Exercice 1: 1) On a

$$\begin{aligned} S(\lambda x+\mu y) &= (0,\lambda x_1+\mu y_1,\ldots,\lambda x_{d-1}+\mu y_{d-1}) \\ &= \lambda(0,x_1,\ldots,x_{d-1})+\mu(0,y_1,\ldots,y_{d-1}) = \lambda S(x)+\mu S(y). \end{aligned}$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^d$. On a

$$\|S(x)\|_\infty = \|(0,x_1,\ldots,x_{d-1})\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,d-1}|x_j| \leq \|x\|_\infty .$$

Ceci montre que S est continue et que $\|S\|_{\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d}\leq 1$. Considérons maintenant $z=(1,0,\ldots,0)$. On a bien sur $\|z\|_\infty=1$. De plus, comme $S(z)=(0,1,0,\ldots,0)$ alors $\|S(z)\|_\infty=1$. Ceci prouve que $\|S\|_{\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d}\geq 1$. On peut donc conclure que $\|S\|_{\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d}=1$.

3)a) Il est clair que $N_\alpha(x)\geq 0$ pour tout x. De plus si $N_\alpha(x)=0$, comme $\alpha>0$ on a immédiatement $x_j=0$ pour tout j et donc $x=0$. Par ailleurs, on a

$$N_\alpha(\lambda x) = \alpha|\lambda x_1|+|\lambda x_2|+\ldots+|\lambda x_d| = |\lambda| N_\alpha(x).$$

De même, on démontre que $N_\alpha(x+y)\leq N_\alpha(x)+N_\alpha(y)$. Ceci achève de montrer que N_α est une norme.

b) Soit $x\in\mathbb{R}^d$. Alors,

$$N_\alpha(Sx) = N_\alpha(0,x_1,\ldots,x_{d-1}) = \sum_{j=1}^{d-1}|x_j| \leq \sum_{j=1}^{d}|x_j|.$$

Comme $\alpha<1$, on en déduit

$$N_\alpha(Sx) \leq \frac{1}{\alpha}\big(\alpha|x_1|+\sum_{j=2}^{d}|x_j|\big) = \frac{1}{\alpha}N_\alpha(x)$$

Ceci montre que S est continue sur (E,N_α) et que sa norme vérifie $|||S|||\leq\frac{1}{\alpha}$.

Considérons maintenant $z=(1,0,\ldots,0)$. On a $N_\alpha(z)=\alpha$ et $N_\alpha(Sz)=1$. Par suite $|||S|||\geq\frac{1}{\alpha}$ et on a donc $|||S|||=\frac{1}{\alpha}$.

Exercice 2: 1) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0$$

quand $n\to\infty$. En utilisant la règle de Cauchy-Hadamard, on en déduit que $R=+\infty$.

2) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}\sqrt{(2n+2)!}} \frac{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}{n!} = \frac{n+1}{4}\sqrt{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}} \to \frac{1}{8}$$

quand $n \to \infty$. En utilisant la règle de Cauchy-Hadamard, on en déduit que $R = 8$.

3) On revient à la définition du rayon de convergence

$$R = \sup\{r > 0,\, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

On va montrer que $R = 1$. Supposons d'abord que $r \in]0,1[$. Comme (a_n) a une limite finie, alors $(a_n r^n)$ tend vers 0 et par suite $(a_n r^n)$ est bornée. Par conséquent $R > r$ pour tout $r < 1$. On en déduit que $R \geq 1$.

Réciproquement pour tout $r > 1$, comme $\ell > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = +\infty$. Par suite $R < r$ pour tout $r > 1$. On en déduit que $R \leq 1$. Cela permet de conclure que $R = 1$.

Exercice 3: 1)a) C'est une conséquence immédiate de la croissance de la fonction ln.

b) On remarque $\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = \ln(1) = 0$. On peut donc appliquer le critère de convergence des séries alternées. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement.

2)a) On a $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$. Or, par critère de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge alors que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Par suite la série $\sum_{n\geq 1}\ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

b) Comme la fonction ln est croissante, il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ est croissante. La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante, il suffit de montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or h est dérivable et on a $h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$. Par suite h est croissante et donc F_n est croissante.

c) On a $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{n(1+x^2)} = \frac{1}{n}$. Par continuité de la fonction ln, on en déduit que $\lim_{x\to\infty} F_n(x) = \ln(1+\frac{1}{n})$.

d) D'après les deux questions précédentes, la fonction F_n est croissante sur $\mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = \ln(1+\frac{1}{n})$. Par suite $\sup_{x\geq 0} F_n(x) = \ln(1+\frac{1}{n})$. Comme $f_n = (-1)^n F_n$ et F_n est positive, on en déduit que $\sup_{x\geq 0}|f_n(x)| = \ln(1+\frac{1}{n})$.

e) Comme $\sum_{n\geq 1}\ln(1+\frac{1}{n})$ diverge, on déduit de la question précédente que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement.

f) D'après le théorème de majoration du reste des séries alternées, on a

$$|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k F_k(x)| \leq F_n(x) \leq \ln(1+\frac{1}{n})$$

où la dernière estimation découle de la question d). On en déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k F_k(x)| \leq \ln(1+\frac{1}{n}) \to 0$$

quand $n \to \infty$. Cela prouve la convergence uniforme de la série $\sum f_n$.

g) Chacune des fonctions f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément. Par théorème de continuité des séries uniformément convergentes, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Problème:

Partie 1 1) Comme $0 < a < 1$ la fonction $s : [0,a] \to \mathbb{R}$ définie par $s(t) = t^2$ a son image contenue dans $[0,a^2] \subset [0,a]$. De plus s est continue. Par suite $\tilde{h} = h \circ s$ est bien définie et continue.

2) Pour tout $x \in [0,a]$, on a

$$|f(x) - g(x)| \leq \int_0^x |f(t^2) - g(t^2)|dt$$

Or, pour $0 \leq t \leq x \leq a < 1$, on a $t^2 \leq a^2 \leq a$. Par suite

$$|f(x) - g(x)| \leq \int_0^x \sup_{s \in [0,a]} |f(s) - g(s)|dt = a \sup_{s \in [0,a]} |f(s) - g(s)|$$

et on conclut en prenant le supremum. **3)** D'après la question précédente, on a

$$(1 - a) \sup_{x \in [0,a]} |f(x) - g(x)| \leq 0$$

et comme $a < 1$, on en déduit $\sup_{[0,a]} |f - g| = 0$ et donc $f = g$.

Partie 2 1) On a

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

et

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t^2)dt = 1 + x + \frac{x^3}{3}.$$

2) Montrons par récurrence que f_n est un polynôme et que $f_n : I \to \mathbb{R}$ est positive et croissante.

Initialisation. Il est clair que $f_0 = 1$ est un polynôme positif et croissant.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n. On a

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t^2)dt$$

Or, f_n est un polynôme. Donc $f_n(t^2)$ est aussi un polynôme et par conséquent sa primitive aussi. On en déduit que f_{n+1} est un polynôme. Comme $f_n \geq 0$, on voit immédiatement que $f_{n+1} \geq 0$. Enfin, f_{n+1} est dérivable et il découle de la formule ci-dessus que

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x^2) \geq 0$$

par hypothèse de récurrence. Par suite f_n est croissante sur I.

3)a) On a

$$D_1 = \sup_{0 \leq x \leq a} |1 + x - 1| = a$$

et

$$D_2 = \sup_{0 \leq x \leq a} |1 + x + \frac{x^3}{3} - 1 - x| = \frac{a^3}{3}$$

b) On applique la formule de récurrence à f_{n+1} et f_n. On obtient

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 1 + \int_0^x f_n(t^2)dt - 1 - \int_0^x f_{n-1}(t^2)dt = \int_0^x (f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2))dt$$

Le même argument qu'à la question 1)a) montre alors que

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq aD_n$$

c) On prend le supremum sur $x \in [0,a]$. Il vient $D_{n+1} \leq aD_n$ et une récurrence immédiate montre $D_n \leq a^{n-1}D_1$ pour tout $n \geq 0$. Comme $D_1 = a$ on obtient le résultat annoncé.

4)a) D'après la question précédente, on a

$$\sup_{[0,a]} |u_n| = \sup_{[0,a]} |f_n - f_{n-1}| = D_n \leq a^n$$

Comme $0 < a < 1$, la série $\sum a^n$ converge et par suite $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement.

b) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$f_n = f_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Or le terme de droite converge uniformément quand $n \to \infty$ d'après la question précédente. Par conséquent, la suite (u_n) est uniformément convergente.

5)a) Chacune des fonctions f est continue (car c'est un polynôme). Comme la série $\sum f_n$ est uniformément convergente, on en déduit que f est continue.

b) Pour tout $x \in [0,a]$, on a

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t^2)dt$$

On fait $n \to \infty$ dans cette identité. Il vient

$$f(x) = 1 + \lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t^2)dt$$

et comme la suite (f_n) converge uniformément, on peut intervertir limite et intégrale. On en déduit

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t^2)dt.$$