Corrigé du Devoir surveillé n° 1

Exercice 1: a) Soit $u_n = \frac{\ln(n)^{n^3}}{n^2}$, alors $u_n = n^{-\frac{3}{2}} v_n$ avec $v_n = \frac{\ln(n)^{n^3}}{\sqrt{n}}$. Par croissance comparée, on a $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Par suite, $u_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}})$ et comme $u_n \geq 0$, on déduit du critère de Riemann que $\sum u_n$ converge.

b) Soit $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. On a

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^{-n^2} = e^{-n^2 \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n^2(\frac{1}{n}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(e^{-n})$$

Or, $\sum e^{-n}$ converge. Comme $u_n \geq 0$, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

c) Soit $u_n = \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$. Comme $u_n \geq 0$, on peut lui appliquer le critère de d'Alembert. On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n^n(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)} \\
&= (1+\frac{1}{n})^n \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}\frac{1+o(\frac{1}{n})}{4+o(\frac{1}{n})} = \frac{e}{4} + o(1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{4} < 1$ donc la série $\sum u_n$ converge.

d) Soit $u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$. En effectuant un DL de sin à l'ordre 1, il vient

$$u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}((\frac{1}{\sqrt{n}})^3) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}})$$

Or $\sum (-1)^n \sqrt{n}$ converge par critère de convergence des séries alternées et $\sum \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}})$ converge par critère de Riemann. Par suite $\sum u_n$ converge.

e) Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$. Notons $v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}$. On a

$$\begin{aligned}
u_n &= v_n + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} \\
&= v_n - (-1)^n \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n)} = v_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}+(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

Or, $\sum v_n$ converge par critère de convergence des séries alternées. Par suite $\sum u_n$ est de même nature que $\sum w_n$ avec $w_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}+(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^{\frac{2}{3}} + (-1)^n n^{\frac{1}{3}} \leq 2n^{\frac{2}{3}}$ donc $w_n \geq \frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}}$. La série $\sum w_n$ étant divergente par critère de Riemann, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2: 1) C'est une simple application du critère de Riemann.

2) La fonction f_a est dérivable et on a

$$f_a'(x) = -\frac{2ax}{(a^2+x^2)^2}$$

Par suite $f_a' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et f_a est donc décroissante.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [k,k+1]$. Comme f_a est décroissante, on a

$$f_a(k) \geq f_a(x) \geq f_a(k+1).$$

En intégrant, il vient

$$f_a(k) \geq \int_k^{k+1} f_a(x)dx \geq f_a(k+1)$$

et en sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} f_a(k) \geq \int_0^{n+1} f_a(x)dx \geq \sum_{k=0}^{n} f_a(k+1)$$

c'est à dire

$$S_n(a) \geq \int_0^{n+1} \frac{a}{a^2+x^2}dx \geq S_{n+1}(a) - f_a(0) = S_{n+1}(a) - \frac{1}{a}$$

Or, on a

$$\int_0^{n+1} \frac{a}{a^2+x^2}dx = [\arctan(\frac{x}{a})]_0^{n+1} = \arctan(\frac{n+1}{a})$$

On a donc

$$S_n(a) \geq \arctan(\frac{n+1}{a}) \geq S_{n+1}(a) - \frac{1}{a}$$

dont on déduit facilement le résultat.

4) On fait tendre n vers l'infini dans l'inégalité de la question précédente. Il vient

$$\frac{\pi}{2} \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}.$$

On en déduit immédiatement que $\lim_{a\to\infty} S(a) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3: 1) Soient x et y deux éléments de $\overline{B}(0,1)$ et soit $t \in [0,1]$. Comme $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, on a

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + 1 - t = 1$$

ce qui montre que $tx+(1-t)y \in \overline{B}(0,1)$. Par suite $\overline{B}(0,1)$ est convexe.

2) Soit $u \in E \setminus \{0\}$. Alors $v := 2\frac{u}{\|u\|}$ appartient à $A := E \setminus \overline{B}(0,1)$. De même $-v \in A$ car $\|-v\| = \|v\| = 2$. Or $\frac{v+(-v)}{2} = 0 \notin A$ ce qui prouve que A n'est pas convexe.

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\|\frac{rx}{\|x\|+2}\| \leq r\frac{\|x\|}{\|x\|+2} \leq \frac{r}{2} < r$$

donc $\frac{\|x\|+2}{r} \in A(x)$ qui est donc non vide. Comme $A(x)$ est non vide et minoré par 0, il possède une borne inférieure et la fonction N est donc bien définie.

b) Par définition, on a $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Supposons que $N(x) = 0$. Comme K est borné, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall z \in K,\ \|z\| \leq M \tag{1}$$

Par ailleurs, comme $N(x) = 0$, il existe une suite de scalaires (α_n) telle que $\alpha_n \to 0$ et $\frac{x}{\alpha_n} \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant (1), il vient $\|x\| \leq M\alpha_n$ et en faisant $n \to \infty$, il vient $\|x\| = 0$ et donc $x = 0$.

Supposons maintenant que $x,y \in \mathbb{R}^d$. Notons $\alpha = N(x)$ et $\beta = N(y)$ et soient (α_n), (β_n) deux suites telles que $\alpha_n > \alpha$ et $\beta_n > \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Soit $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$. On a bien sur $\gamma_n > \alpha + \beta$ et $\gamma_n \to \alpha + \beta$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{x+y}{\gamma_n} = \frac{x}{\alpha_n+\beta_n} + \frac{y}{\alpha_n+\beta_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}\frac{x}{\alpha_n} + \frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\frac{y}{\beta_n} = t_n\frac{x}{\alpha_n} + (1-t_n)\frac{y}{\beta_n}$$

avec $t_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n} \in [0,1]$. Or, par définition $\frac{x}{\alpha_n}$ et $\frac{y}{\beta_n}$ appartiennet à K qui est convexe. Par suite $\frac{x+y}{\gamma_n}$ appartient à K. On en déduit donc que $N(x+y) \leq \gamma_n$ et en faisant $n \to \infty$, il vient $N(x+y) \leq \alpha + \beta = N(x) + N(y)$, ce qui montre l'inégalité triangulaire.

Il reste à montrer que N est homogène pour la multiplication par un scalaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord que $\lambda > 0$, alors

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \inf\{\alpha > 0, \frac{\lambda x}{\alpha} \in K\} = \inf\{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha/\lambda} \in K\} \\ &= \inf\{\lambda\alpha' > 0, \frac{x}{\alpha'} \in K\} = \lambda \inf\{\alpha' > 0, \frac{x}{\alpha'} \in K\} = \lambda N(x) \end{aligned}$$

ce qui montre l'homogénéité pour $\lambda > 0$. Si $\lambda < 0$, comme K est symétrique alors $N(\lambda x) = N(-\lambda x)$ et on conclue grace au cas précédant.