CPBX 2019-20
Analyse 2
Université de Bordeaux

Corrigé du Devoir surveillé n° 2

Exercice 1: 1) Pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ par croissance comparée. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$. Finalement on a bien $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. La suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2) Soit $n \geq 1$. On étudie les variations de la fonction f_n. Il est clair que f_n est C^1 et que

$$f_n'(x) = n(3x^2 - 2nx^4)e^{-nx^2} = nx^2(3 - 2nx^2)e^{-nx^2}.$$

Par suite $f_n'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = \sqrt{\frac{3}{2n}}$. De plus $f_n(0) = 0$ et $f_n(\sqrt{\frac{3}{2n}}) = (\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme en plus, $f_n(1) > 0$, on en déduit $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = (\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} =: m_n$. Comme $\lim_{n\to\infty} m_n = 0$, on en déduit que la suite (f_n) converge uniformément vers 0.

3) La suite de fonction (f_n) converge uniformément vers 0 donc on peut appliquer le théorème d'interversion limite-intégrale. Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Exercice 2: 1) De l'inégalité $x^3 + y^3 \leq (x + y)^3$ pour tout $x,y \geq 0$, on déduit $a + b = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}})^3 \leq (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})^3$ et on conclut en prenant la racine cubique.

2) Soit $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) = (x + \frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \leq (\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}}$$

grace à la question précédente. Par suite

$$\sup_{[0,1]} |f_n - f| \leq (\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} \to 0$$

quand $n \to \infty$ ce qui prouve la convergence uniforme.

Exercice 3: 1) Comme u est linéaire alors $u(0) = 0$. Par suite $0 \in u(B(0,1)$.

2) Comme $B(0,1)$ est ouvert, l'hypothèse faite sur u implique que $u(B(0,1)$ est ouvert. Or $0 \in u(B(0,1)$ d'après la question précédente. Par suite, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset u(B(0,1)$.

3) Soit $y \in F$. On cherche $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Si $y = 0$ il est clair que $x = 0$ convient. Supposons $y \neq 0$ alors $z := \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|}$ vérifie $\|z\| = \frac{r}{2}$. Par suite $z \in B(0,r)$ et d'après la question précédente, on en déduit que $z \in u(B(0,1)$. Par conséquent, il existe $w \in B(0,1)$ tel que $z = u(w)$ et par suite

$$y = \frac{2}{r}\|y\|z = u(\frac{2}{r}\|y\|w)$$

Il suffit donc de prendre $x = \frac{2}{r}\|y\|w$.

4) Comme u est injective alors elle est bijective. Pour montrer que u^{-1} est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque par u^{-1} de tout ouvert est ouvert. Supposons que $O \subset E$ est ouvert. Alors

$$(u^{-1})^{-1}(O) = \{y \in F, u^{-1}(y) \in O\} = u(O)$$

qui est ouvert par hypothèse sur u.

Exercice 4: 1) C'est immédiat.

2) Il est clair que pour tout $P \in E$, $N_0(P) \leq N_1(P)$. Par contre il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_1 \leq CN_0$. En effet, soit $P_n(X) = X^n$. Alors $N_0(P) = 1$ et $N_1(P) = n$ et l'inégalité $n \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est absurde.

3) Soit $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ un polynôme. On a

$$|\varphi(P)| = |P(1)| = |\sum_{n=0}^{N} a_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| = N_0(P)$$

Ceci montre que φ est continue de (E,N_0) dans $(\mathbb{R},|.|)$ et que $\|\varphi\|_{(E,N_0)\to(\mathbb{R},|.|)} \leq 1$. Par ailleurs, on a $N_0(1) = 1 = \varphi(1)$ donc $\|\varphi\|_{(E,N_0)\to(\mathbb{R},|.|)} = 1$.

4) Soient $f : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $f(P) = P(-1)$. On montre facilement que f est continue de (E,N_0) dans $(\mathbb{R},|.|)$. Par suite la forme linéaire $g = \varphi + f$ est continue de sorte que $A = g^{-1}(]-\infty,0[)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par g.

5) Soit $Q_n = X^n$. On a $N_0(Q_n) = 1$ alors que $|\psi(Q_n)| = |Q_n(2)| = 2^n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Par suite ψ ne peut pas être continue.

6) On voit immédiatement que $\psi(P_n) = 1$ et que $N_0(P_n) = 2^{-n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Par suite $P_n \to 0$. Or $\psi(0) = 0$ donc $0 \notin B$. Ceci montre que B n'est pas fermé.

7) Pour tout $P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$, on a

$$|\psi(P)| = |P(2)| = |\sum_{n=0}^{N} a_n 2^n| \leq \sum_{n=0}^{N} 2^n |a_n| = N_1(P).$$

Ceci montre que ψ est continue (E,N_1) dans $(\mathbb{R},|.|)$