CPBX 2019-20
Analyse 2
Université de Bordeaux

Corrigé de l'examen

Exercice 1: Dans la suite, on note R le rayon de convergence de la série.

1) On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1}{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$ quand $n \to \infty$. Par suite $R = \frac{1}{e}$.

2) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})} \longrightarrow 1$$

quand $n \to \infty$. Par suite $R = 1$.

3) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (3n+3)(3n+2)(3n+1)\frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \longrightarrow 27$$

quand $n \to \infty$. Par suite $R = \frac{1}{27}$.

Exercice 2:

1) On a $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}$ comme somme d'une série géométrique.

2) On a $f(x) = g'(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Or, g est DSE sur $]-1{,}1[$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$. Par théorème de dérivation des séries entières, on en déduit que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kx^{2k-1}$$

Exercice 3:

1) On a $\mathring{A} \subset A$ et $B \subset \bar{B}$. Par suite $\mathring{A} \setminus \bar{B} \subset A \setminus B$. De plus $\mathring{A} \setminus \bar{B}$ est ouvert. Par définition de l'intérieur, il suit que $\mathring{A} \setminus \bar{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \setminus B}}$.

Réciproquement, soit $a \in \overset{\circ}{\overbrace{A \setminus B}}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A \setminus B$. En particulier $B(a,r) \subset A$ donc $a \in \mathring{A}$. De plus, comme $B(a,r)$ est ouvert et $B(a,r) \cap B = \emptyset$ alors $a \notin \bar{B}$. On en déduit que $a \in \mathring{A} \setminus \bar{B}$.

2) On a $A \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ qui est fermé. Par suite $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

De même, l'ensemble $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$. Par définition de l'interieur, il suit que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

3) Prenons $A = [0{,}1[$ et $B = [1{,}2]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Par ailleurs $\bar{A} \cap \bar{B} = [0{,}1] \cap [1{,}2] = \{1\}$.

On a aussi $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{\overbrace{[0{,}2]}} =]0{,}2[$. Comme $\mathring{A} =]0{,}1[$ et $\mathring{B} =]1{,}2[$ on en déduit $\mathring{A} \cup \mathring{B} \neq \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

Exercice 4:

La linéarité de ϕ est évidente. Soit $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ un polynôme. Alors

$$\phi(P) = P' + P = \sum_{n=0}^{N-1}(n+1)a_{n+1}X^n + \sum_{n=0}^{N} a_n X^n.$$

Par suite
$$\|\phi(P)\|_\infty \leq \|P'\|_\infty + \|P\|_\infty \leq (N+1)\|P\|_\infty.$$
Ceci montre que ϕ est continue et que $\|\phi\|_{E\to E} \leq N+1$.

Prenons $P(X) = X^N + X^{N-1}$. On a bien sur $\|P\|_\infty = 1$. Par ailleurs
$$P'(X) + P(X) = X^N + (N+1)X^{N-1} + (N-1)X^{N-2}.$$
On en déduit $\|\phi(P)\|_\infty = N+1$ et par conséquent $\|\phi\|_{E\to E} = N+1$.

Exercice 5:

1) L'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont immédiates. Montrons que $\|.\|$ est définie positive. Supposons que $f \in E$ vérifie $\|f\| = 0$. Alors $xf(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Par suite $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$. Comme f est continue, on en déduit que $f(0) = 0$ et par suite $f = 0$.

2) Il est clair que ϕ est continue. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^2 \leq x$ donc
$$|\phi(f)| \leq \int_0^1 f(x)x^2dx \leq \int_0^1 f(x)xdx = \|f\|$$
On en déduit que ϕ est continue et que $\|\phi\|_{E\to\mathbb{R}} \leq 1$.

Calculons maintenant cette norme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n(x) = x^n$. Alors $\|f_n\| = \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$ et $|\phi(f)| = \int_0^1 x^{n+2}dx = \frac{1}{n+3}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\phi(f_n)|}{\|f_n\|} = 1$ et donc $\|\phi\|_{E\to\mathbb{R}} = 1$.

Problème

Partie I

I.1) On considère la fonction continue décroissante $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $x \in [k,k+1]$, on a $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. En intégrant entre k et $k+1$ et en sommant entre 1 et n, on obtient l'inégalité annoncée.

I.2) On déduit immédiatement de la question précédente que la série diverge.

I.3) On a $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ donc $u_n \geq v_n$ et $u_n - v_n \to 0$. Il reste à montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante. On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) \leq 0$$
grace à l'indication. On en déduit que (u_n) est décroissante. De même, on a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \geq 0$ donc (v_n) est croissante.

I.4) C'est immédiat.

I.5) On a
$$r_n - r_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)\frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

I.6) Soit $w_n = r_n - r_{n-1}$. C'est le terme général d'une série convergente de signe constant. Par théorème d'équivalence des restes, on a
$$\sum_{k=n}^{\infty} w_n \sim -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$
quand $n \to \infty$. Par ailleurs, $\sum w_n$ est une série telescopique. On a donc $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} w_n$ ce qui permet de conclure.

I.7) Notons $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Par comparaison série-intégrale, on a

$$S_{n+1} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq S_n.$$

On en déduit $\frac{1}{n} \leq S_n \leq \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, ce qui prouve le résultat.

I.8) On réunit les informations précédentes. Il vient

$$\begin{aligned} H_n = u_n + \ln(n) &= \ln(n) + \gamma + r_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} + o(\frac{1}{n}) \\ &= \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Partie II

II.1) Pour $x > -1$ et $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ qui est le terme général d'une série convergente par critère de Riemann. Donc $S(x)$ est bien définie.

II.2) Soit $a > -1$. On voit facilement que la fonction $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ est croissante. Par suite

$$-\frac{1}{n(n-1)} \leq f_n(x) \leq \frac{a}{n(n+a)}$$

En supposant $a > 0$, on en déduit que $|f_n(x)| \leq \max(\frac{1}{n(n-1)}, \frac{a}{n(n+a)})$ sur $]-1,a]$. Ceci montre que la série est normelement convergente sur $]-1,a]$. Par théorème de continuité, on en déduit que S est continue.

II.3) On a clairement $S(0) = 0$ et par sommation d'une série télescopique, on a $S(1) = 1$.

II.4) Pour tout $a > 0$ et $n \geq 2$, la fonction f_n est clairement C^1 sur $]-1,a]$ et $f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$. Par suite $\sup_{x \in]-1,a]} |f_n'(x)| \leq \frac{1}{(n-1)^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions. On en déduit que S est dérivable sur $]-1,a]$ pour tout $a > 0$. Par suite S est dérivable sur J et $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

II.5) D'après la question précédente, on a clairement $S'(x) \geq 0$ pour tout $x \in J$. Par suite S est croissante.

II.6) On a

$$\begin{aligned} S(p) &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}) = \lim_{N \to +\infty} \Big(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \sum_{n=p+1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{N+p} \frac{1}{n} \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

car $\sum_{n=N+1}^{N+p} \leq \frac{p}{N+1} \to 0$ quand $N \to \infty$.

II.7) On déduit de la question précédente et de la partie I, que $\lim_{p \to +\infty} S(p) = +\infty$, où la variable $p \in \mathbb{N}$. Comme par ailleurs la fonction S est croissante, on a $S(x) \geq S(Ent(x))$ pour tout x. Par suite, $\lim_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$.