CPBX 2018-19
Analyse 2
Université de Bordeaux

Examen terminal (durée 3h)

Exercice 1 *Soit $d \geq 2$ et soit $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'application définie par $S(x_1,\dots,x_d) = (0,x_1,\dots,x_{d-1})$.*

1. *Montrer que S est linéaire.*
2. *On munit $\mathbb{R}^d$ de la nome $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d}|x_i|$. Montrer que $S : (E,\|.\|_\infty) \to (E,\|.\|_\infty)$ est continue et calculer la norme de l'application linéaire S.*
3. *Soit $\alpha \in]0,1[$.*
   (a) *Montrer que $N_\alpha(x) = \alpha|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^d$.*
   (b) *Calculer la norme de $S : (\mathbb{R}^d,N_\alpha) \to (\mathbb{R}^d,N_\alpha)$.*

Exercice 2 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants*

1. $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$, $n \geq 1$
2. $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$, $n \geq 1$
3. (a_n) *est une suite non identiquement nulle telle que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell > 0$.

Exercice 3 *On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $n > 0$ par $f_n(x) = (-1)^n F_n(x)$ où*

$$F_n(x) = \ln\Big(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\Big).$$

1. (a) *Montrer que pour tout x_0 fixé, la suite numérique $(F_n(x_0))_{n\geq 1}$ est décroissante.*
   (b) *En déduire que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement.*
2. (a) *Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n})$ est divergente.*
   (b) *Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto F_n(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.*
   (c) *Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.*
   (d) *En déduire la valeur de $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)|$.*
   (e) *La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge-t-elle normalement?*
   (f) *En utilisant la majoration des restes des séries alternées, montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément.*
   (g) *Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

TOURNER LA PAGE SVP

Problème

Dans tout le problème a désigne un réel fixe tel que $0 < a < 1$ et on note $I = [0,a]$. On se propose de montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ solution de

$$\forall x \in I,\ f(x) = 1 + \int_0^x f(t^2)dt. \tag{1}$$

Partie I.

1. Soit $h : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $\tilde{h}(t) = h(t^2)$ est bien définie sur $[0,a]$ et que $\tilde{h}$ est continue.
2. Supposons que f et g sont deux fonctions continues sur I solutions de (1). Montrer que
$$\sup_{x\in I} |f(x) - g(x)| \leq a \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$$
3. Montrer que (1) possède au plus une solution.

Partie II. On montre dans cette partie que (1) possède une solution. On considère la suite de fonction (f_n) définie par

$$\left\{ \begin{array}{c} f_0 = 1 \\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t^2)dt,\ \forall x \in I \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Calculer f_1 et f_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un polynôme et que $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction positive croissante.
3. Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$.
   (a) Calculer D_1 et D_2.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq aD_n,\ \forall x \in I \tag{3}$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $D_n \leq a^n$.
4. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = f_n - f_{n-1}$.
   (a) Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur I.
   (b) En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I.
5. On note f la limite de la suite (f_n).
   (a) Montrer que f est continue sur I.
   (b) Montrer que f est solution de (1).