CPBX 2019-20
Analyse 2
Université de Bordeaux

Examen terminal (durée 3h)

Exercice 1 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$ *dans les cas suivants*

1. $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \geq 1$
2. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \geq 0$
3. $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$, $n \geq 1$.

Exercice 2 *Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en* 0 *et donner leur DSE:*

1. $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$, $x \in]-1,1[$
2. $f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $x \in]-1,1[$

Exercice 3 *Soit* $(E,\|.\|)$ *un espace vectoriel normé et soient* A,B *deux parties de* E.

1. *Montrer que* $\overset{\circ}{\widehat{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \bar{B}$.
2. *Montrer que* $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ *et* $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.
3. *Donner des exemples montrant que les inclusions précédentes sont strictes (i.e. ne sont pas des égalités).*

Exercice 4 *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $E = \mathbb{R}_N[X]$ *munit de la norme* $\|P\|_\infty = \max_{n=0,\dots,N} |a_n|$ *pour tout* $P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$. *Soit*

$$\phi : (E,\|.\|_\infty) \to (E,\|.\|_\infty)$$

définie par $\phi(P) = P' + P$. *Montrer que* ϕ *est linéaire, continue et calculer sa norme.*

Exercice 5 *Soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$.

1. *Montrer que*
$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| x dx$$
définit une norme sur E.
2. *On considère l'application* $\phi : (E,\|.\|) \to (\mathbb{R},|.|)$ *définie par* $\phi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)dt$. *Montrer que* ϕ *est linéaire continue et calculer sa norme.*
3. *L'application* $\psi : (E,\|.\|) \to (\mathbb{R},|.|)$ *définie par* $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$ *est elle continue?*

TOURNER LA PAGE SVP

Problème

Partie I

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$

2. En déduire la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.
3. Soient $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n} = H_n - \ln(n) - \frac{1}{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Indication. On pourra utiliser l'inégalité: $x \geq \ln(1+x),\ \forall x > -1$
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune γ.
5. Soit $r_n := u_n - \gamma$. Montrer que $r_n - r_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$ quand $n \to \infty$.
6. En déduire que

$$r_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \text{ quand } n \to \infty$$

7. Montrer que lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

8. Conclure que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

Partie II

Pour $x \in J :=]-1, +\infty[$, on considère

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big).$$

1. Montrer que S est bien définie sur J.
2. Montrer que S est continue sur tout intervalle de la forme $]-1,a]$, avec $a > -1$.
3. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
4. Montrer que S est de classe C^1 sur J.
5. Montrer que S est croissante.
6. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $S(p) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$.
7. En déduire que $\lim_{x\to\infty} S(x) = +\infty$.