Révisions Calcul Différentiel

L. Michel

20 septembre 2021

Merci à Maxime Breden pour ses fichiers .tex qui ont servi de base à la rédaction de ces notes.

1 Différentielle et gradient

On considère $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés réels, U un ouvert de E, $a \in U$ et une application $f : U \to F$.

Notation 1 *On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de sa norme naturelle.*

Remarque 2 *Même si on omettra souvent les indices $_E$ et $_F$ pour les normes, il est important de toujours savoir où vivent les différents objets qu'on manipule!*

Définition 3 ***(Application différentiable)*** *Une application $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que*

$$\forall\ h\ \text{(tel que } a+h \in U\text{)},\ f(a+h) = f(a) + L(h) + o\left(\|h\|_E\right).$$

Si elle existe, une telle application L est forcément unique, on la note $Df(a)$ (ou parfois $D_a f$) et on l'appelle différentielle de f en a.

Remarque 4 *Si on se restreint aux espaces vectoriels de dimension finie, il est inutile de demander que L soit continue (elle l'est automatiquement) et il est aussi inutile de spécifier les normes qu'on utilise (elles sont toutes équivalentes). Par contre, ces considérations sont évidemment cruciales si on veut parler de différentielle en dimension infinie.*

Définition 5 *Soit $v \in E$. On dit que f est dérivable en a selon v (ou dans la direction v), si*
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \text{ existe.}$$
Dans ce cas, on note $f'_v(a) \in F$ cette limite. Si E est de dimension finie et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on note aussi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$ la dérivée directionnelle $f'_{e_i}(a)$, qu'on appelle i ème dérivée partielle de f en a.

Proposition 6 *Si f est différentiable en a, alors elle est dérivable en a dans toutes les directions et*
$$\forall v \in E,\ f'_v(a) = Df(a)v.$$

Attention la réciproque est fausse comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 7 ***(Contre exemple)*** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.*

1. *Calculer ses dérivées directionnelles en $(0,0)$.*
2. *f est-elle différentiable en $(0,0)$?*

Proposition 8 (Composition) *Soient E,F,G des evn, $U \subset E, V \subset F$ des ouverts et soit $a \in U$. On suppose que $f : U \to F$ et $g : V \to G$ sont différentiables en a et $f(a)$ respectivement et que $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et*
$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Proposition 9 (Matrice Jacobienne) *Soit*
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \end{aligned}$$
une application différentiable, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Alors la matrice de $Df(x)$ est $Jac(f)(x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$. Lorsque $m = n$, le déterminant de $Jac(f)(x)$ s'appelle Jacobien de f.

Définition 10 ***(Application $\mathscr{C}^1$)*** *On dit que f est continument différentiable, ou $\mathscr{C}^1$, sur U si elle est différentiable sur U et que l'application différentielle $Df : a \mapsto Df(a)$ est continue de U dans $\mathcal{L}(E,F)$.*

Théorème 11 *f est $\mathscr{C}^1$ sur U si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

Preuve. Le sens direct est immédiat. Supposons qu'en tout point de U, f admet des dérivées partielles et que ces dérivées sont continues. On suppose pour simplifier que $E = \mathbb{R}^2$. Le cas général se traite de la même manière. Soient $a = (a_1,a_2)$ et $h = (h_1,h_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1+h_1,a_2) + f(a_1+h_1,a_2) - f(a_1,a_2) \\ &= \int_0^1 \partial_2 f(a_1+h_1,a_2+th_2)h_2 dt + \partial_1 f(a)h_1 + o(h_1) \end{aligned}$$

Comme $\partial_2 f$ est continue en a, on a $\partial_2 f(a_1+h_1,a_2+th_2) = \partial_2 f(a) + o(1)$ et par suite

$$f(a+h) = f(a) + \partial_1 f(a)h_1 + \partial_2 f(a)h_2 + o(h).$$

Ceci prouve que f est différentiable en a et que $Df(a)(h) = \partial_1 f(a)h_1 + \partial_2 f(a)h_2$. Comme les applications $a \mapsto \partial_i f(a)$ sont continues, il en va de même de l'application $a \mapsto Df(a)$. $\square$

Définition 12 ***Fonction à valeurs réelles et gradient.*** *Supposons que $(E,\langle,\rangle)$ est un espace de Hilbert et que $F = \mathbb{R}$. Si f est différentiable en a alors $Df(a)$ est une forme linéaire sur E et d'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur de E noté $\nabla f(a)$ tel que*

$$\forall h \in E, \quad Df(a)h = \langle \nabla f(a),h\rangle.$$

Dans le cas où E est de dimension finie et si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de E, on a

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de f dans la direction e_j.

Remarque 13 *Cette notion s'étend au cas d'une fonction sur une variété Riemanienne.*

Proposition 14 ***(Inégalité des accroissements finis)*** *On suppose que f est différentiable sur U, que $a,b \in U$ sont tels que $[a,b] \subset U$, et que $M = \sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\| < \infty$. Alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|.$$

Corollaire 15 *Si U est connexe et que $Df(x) = 0$ pour tout x dans U, alors f est constante sur U.*

2 Inversion locale et fonctions implicites

Dans cette section, V désigne un ouvert de F.

Définition 16 ***($\mathscr{C}^1$ difféomorphisme)*** *On dit que f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur V si f est une bijection de U sur V, de classe $\mathscr{C}^1$, et que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Théorème 17 ***(Théorème d'inversion locale en dimension finie)*** *Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $Df(a)$ est inversible, alors f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme local en a, i.e. il existe un voisinage ouvert U_a de a tel que f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U_a sur $f(U_a)$.*

Remarque 18 *Si on veut énoncer ce théorème en dimension infinie, il faut rajouter une hypothèse supplémentaire qui est que $Df(a)^{-1}$ est continue. Ceci est automatique en dimension finie (car $Df(a)^{-1}$ est linéaire) mais pas dans le cadre de la dimension infinie. Cependant, si E et F sont des espaces de Banach, un corollaire du théorème de l'application ouverte donne que si $Df(a)$ est linéaire continue et inversible, $Df(a)^{-1}$ l'est aussi, et l'hypothèse supplémentaire est donc superflue.*

Preuve du théorème. Quitte à translater les variables, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$. On remarque que

$$f = Df(0) \circ Df(0)^{-1} \circ f.$$

On note $g = Df(0)^{-1} \circ f$. Comme f est C^1 et que $Df(0)^{-1}$ est continue alors g est C^1 et $Dg(0) = \mathrm{Id}$. De plus, comme $Df(0)$ est un C^1 difféormorphisme (car indépendant de x), il suffit de montrer que g est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme local en 0.

On remarque que $Dg(0) = Df(0)^{-1} \circ Df(0) = \mathrm{Id}$. Par suite, il existe $r > 0$ tel que pour tout

$$\forall x \in B_r,\ \|Dg(x) - \mathrm{Id}\,\| \leq \frac{1}{2} \tag{1}$$

où $B_r = B(0,r)$. Considérons le voisinage ouvert de 0, $U_r = B_r \cap g^{-1}(B_{\frac{r}{4}})$. Montrons que g est un homéomorphisme de U_r sur $B_{\frac{r}{4}}$. En utilisant (1) et l'inégalité des accroissements finis, on obtient facilement l'injectivité de g sur B_r. Par ailleurs, pour tout $y \in B_{\frac{r}{4}}$, on a $g(x) = y$ si et seulement si $\varphi(x) = x$, où

$$\varphi(x) = x - g(x) + y.$$

En utilisant à nouveau (1), on voit que φ est $\frac{1}{2}$-Lischitzienne. De plus, pour tout $x \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}$, on a

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(0) + y\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\| \leq \frac{r}{2}.$$

Donc $\varphi(\overline{B}_{\frac{r}{2}}) \subset \overline{B}_{\frac{r}{2}}$. Par conséquent, on peut appliquer el théorème du point fixe de Picard à φ, ce qui montre qu'il existe $x \in \overline{B}_{\frac{r}{2}} \subset B_r$ tel que $\varphi(x) = x$. Ceci montre que pour tout $y \in B_{\frac{r}{4}}$ il existe $x \in B_r$ tel que $g(x) = y$. Par suite, $g : U_r \to B_{\frac{r}{4}}$ est bijective.

Il reste à montrer que g^{-1} est différentiable sur $B_{\frac{r}{4}}$. On commence par montrer que g^{-1} est 2-Lipschitzienne. Soient $y,y' \in B_{\frac{r}{4}}$ et soient $x,x' \in B_r$ tels que $g(x) = y$ et $g(x') = y'$. Alors

$$x - x' = x - g(x) + y - x' + g(x') - y' = y - y' + \theta(x) - \theta(x')$$

où $\theta = \mathrm{Id} - g$ est $\frac{1}{2}$-Lipschtzienne. Par suite

$$\|x - x'\| \leq \|y - y'\| + \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

dont on déduit

$$\frac{1}{2}\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y')\| \leq \|y - y'\|.$$

Ceci prouve que g^{-1} est 2-Lipschitzienne. Montrons qu'elle est différentiable. Soient $y,y' \in B_{\frac{r}{4}}$ et soient $x,x' \in U_r$ tels que $g(x) = y$ et $g(x') = y'$. Comme g est différentiable en x, on a

$$y' - y = g(x') - g(x) = Dg(x)(x' - x) + o_x(x' - x).$$

De plus, comme g^{-1} est Lipschitzienne, il vient

$$y' - y = Dg(x)(x' - x) + o_y(y' - y).$$

En appliquant $Dg(x)^{-1}$, on obtient

$$x' - x = Dg(x)^{-1}(y' - y) + o_y(y' - y)$$

ce qui prouve que g^{-1} est différentiable en y et que $Dg^{-1}(y) = Dg(x)^{-1}$. Enfin la continuité de l'application $y \mapsto Dg^{-1}(y)$ s'obtient par théorème de composition et continuité des applications $y \mapsto g^{-1}(y)$, $z \mapsto Dg(z)$ et $M \mapsto M^{-1}$ cette dernière application étant définie sur les matrices inversibles. □

Théorème 19 ***(Théorème d'inversion globale en dimension finie).*** *On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$, que $Df(x)$ est inversible pour tout x de U et que f est injective sur U. Alors f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur $f(U)$ (en particulier $f(U)$ est ouvert).*

Preuve. C'est immédiat avec le théorème d'inversion locale. □

Exercice 20 ***Contre-exemples, [R] p. 204.***

1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local, mais n'est pas un difféomorphisme global. Que peut-on en déduire pour la fonction holomorphe $z \mapsto z^2$?*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x + x^2 \sin(\pi/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est pas inversible au voisinage de 0. Pourquoi le TIL ne s'applique-t-il pas ici?*

Théorème 21 ***(Théorème des fonctions implicites en dimension finie)*** *Soient U est un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $f(a,b) = 0$ pour un certain $(a,b) \in U$ et que $D_y f(a,b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $U_a \subset \mathbb{R}^p$ de a, un voisinage $U_b \subset \mathbb{R}^q$ de b (avec $U_a \times U_b \subset U$) et une unique fonction $\varphi : U_a \to U_b$, de classe $\mathscr{C}^1$, tels que*

$$((x,y) \in U_a \times U_b) \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in U_a \text{ et } y = \varphi(x)) .$$

Remarque 22
1. *Comme f et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$, on peut différentier la relation $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour trouver l'expression de $D\varphi(x)$.*

2. *Même remarque que pour le théorème d'inversion locale : en dimension infinie il faut supposer que $D_y f(a,b)^{-1}$ est continue (mais c'est automatique dans un Banach).*
3. *Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites sont équivalents.*

Preuve du Théorème des fonctions implicites. On va déduire le Théorème des fonctions implicites du Théorème d'inversion locale. Soient $\tilde{U}_a$ et $\tilde{U}_b$ des voisinages ouverts de a et b respectivement, tels que $\tilde{U}_a \times \tilde{U}_b \subset U$. Soit

$$\begin{cases} \phi : \tilde{U}_a \times \tilde{U}_b \to \tilde{U}_a \times \mathbb{R}^p \\ \qquad (x,y) \mapsto (x,f(x,y)). \end{cases} \tag{2}$$

Pour tout $(x,y) \in \tilde{U}_a \times \tilde{U}_b \subset U$, on a

$$D\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ D_x f(x,y) & D_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

où l'on note $D_x f$ (resp. $D_y f$) la différentielle partielle de f par rapport à x (resp. y). Comme $D_y f(a,b)$ est inversible, il vient immédiatement que $D\phi(a,b)$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts U_a et U_b de a et b respectivement et un voisinage ouvert V de $(a,0)$ tels que $\phi_{|U_a \times U_b}$ est un C^1 difféomorphisme de $U_a \times U_b$ sur V. Par ailleurs, il découle de la forme (2) de ϕ que ϕ^{-1} est de la forme

$$\phi^{-1}(u,v) = (u,\psi(u,v))$$

avec $\psi : V \to U_b$ qui vérifie $f(u,\psi(u,v)) = v$. Définissons

$$U'_a = \{u, \in U_a,\, (u,0) \in V\}.$$

C'est un voisinage ouvert de a. Par suite , l'application $\varphi : U'_a \to U_b$ donnée par $\varphi(u) = \psi(u,0)$ est bien définie et régulière de U'_a dans U_b. De plus, pour tout $(u,v) \in U_a \times U_b$, on a

$$\begin{aligned} f(u,v) = 0 &\iff \phi(u,v) = (u,0) \iff et(u,v) = \phi^{-1}(u,0) \\ &\iff (u,v) = (u,\varphi(u)) \iff v = \varphi(u) \end{aligned}$$

qui est exactement le résultat demandé. □

3 Différentielles d'ordre supérieur et formules de Taylor

3.1 Quelques rappels

Définition 23 *Soient E et F deux evn et U un ouvert de E. Soit $f : U \to F$ une application différentiable et soit $Df : a \in U \mapsto Df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$ l'application différentielle. Si $Df : U \to \mathcal{L}(E,F)$ est différentiable en $a \in U$ on dit que f est deux fois différentiable en a et on note $D^2f(a) = D(Df)(a)$.*

Notation 24 *Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $L_k(E,F)$ l'espace vectoriel des applications k-linéaires (c'est à dire les applications de $E^k \to F$ linéaires en chacune des variables).*

La propositions suivantes permet d'interpreter les différentielles d'ordre supérieures comme des applications k-linéaires.

Proposition 25 ***(Identification)*** *On a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ et $L_2(E,F)$ et plus généralement de $\mathcal{L}(E,\ldots\mathcal{L}(E,F))$ (k fois) dans $L_k(E,F)$.*

Preuve. On fait le cas $k = 2$. On définit $\phi : \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \to L_2(E,F)$ par

$$\phi(u)(e_1,e_2) = u((e_1)(e_2).$$

On vérifie facilement que ϕ est un isomorphisme. □

Théorème 26 ***(Théorème de Schwarz [P])*** *Si f est deux fois différentiable en a, alors l'application bilinéaire $D^2f(a)$ est symétrique. Plus généralement, si f est k fois différentiable en a, $k \geq 2$, alors l'application multilinéaire $D^kf(a)$ est symétrique.*

Preuve. On peut supposer $a = 0$. On doit montrer que pour tout $h,k \in E$, on a

$$D^2f(0)(h)(k) = D^2f(0)(k)(h).$$

On introduit la fonction $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ définie par $g(x,y) = f(xh + ky)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = Df(xh + ky)(h)$$

et en dérivant par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = D^2f(xh + ky)(k)(h)$$

et en faisant $x = y = 0$, il vient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) = D^2 f(0)(k)(h)$$

De même

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = D^2 f(0)(h)(k).$$

On est donc ramené à démontrer que pour toute fonction $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, on

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \tag{3}$$

Considérons la fonction

$$\Delta_1(x,y) = g(x,y) - g(x,0) - g(0,y) + g(0,0) - xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) \tag{4}$$

Il suffit de montrer que $\Delta_1(x,y) = o(xy)$. En effet, par symétrie on a aussi $\Delta_2(x,y) = o(x,y)$ avec

$$\Delta_1(x,y) = g(x,y) - g(0,y) - g(x,0) + g(0,0) - xy \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) \tag{5}$$

et en faisant la différence de (4) et (5) il vient

$$xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) - xy \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) = o(xy)$$

En divisant par xy et en faisant $x,y \to 0$ on obtient (3). Il reste donc à démontrer (4). Soit $\epsilon > 0$. Comme g est C^2, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|x|,|y| < \delta$, on a

$$\Big| \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) \Big| < \epsilon \tag{6}$$

Or le membre de gauche ci-dessus est exactement

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial_x} \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - x \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) \Big).$$

Combiné avec le théorème des accroissements finis entre 0 et x, ceci montre que

$$\Big| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - x \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial g}{\partial y}(0,y) \Big| < \epsilon |x|$$

qui peut se réécrire

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\big(g(x,y) - xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) - g(0,y)\big)\right| < \epsilon|x|.$$

En utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis entre 0 et y, on obtient

$$\left|g(x,y) - xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) - g(0,y) - g(x,0) + g(0,0)\right| < \epsilon|xy|$$

ce qui montre que $\Delta_1(x,y) = o(xy)$ et achève la démonstration □

Corollaire 27 *Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application 2 fois différentiables. Alors pour tout $i,j = 1,\dots,p$, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = D^2 f(e_i,e_j) = D^2 f(e_j,e_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

□

Notation 28 *On abrégera $D^k f(a)(h,\dots,h)$ en $D^k f(a)(h)^k$.*

Théorème 29 ***(Formule de Taylor-Young)*** *Si f est k fois différentiable en a, alors*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \cdots + \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k + o\left(\|h\|^k\right).$$

Théorème 30 ***(Formule de Taylor avec reste intégral)*** *Si f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur U et que $[a,b] \subset U$, alors*

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + Df(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{k!}D^k f(a)(b-a)^k \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+t(b-a))(b-a)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Théorème 31 ***(Inégalité de Taylor-Lagrange)*** *Si f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur U et que $[a,b] \subset U$, alors*

$$\left\| f(b) - f(a) - Df(a)(b-a) - \cdots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(b-a)^k \right\| \\ \leq \max_{x \in [a,b]} \|D^{k+1} f(x)\| \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Remarque 32 *Si f est à valeurs réelles, on a aussi une égalité de Taylor-Lagrange (analogue à celle pour les fonctions d'une seule variable), mais comme pour le théorème des accroissements finis, elle est fausse dès que l'espace d'arrivée n'est plus de dimension 1.*

3.2 Application à la recherche d'extrema

Théorème 33 ***(Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'extrema)*** *On suppose que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on considère $f : U \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est différentiable en a et y admet un extremum local, alors $Df(a) = 0$.*
2. *Si f est deux fois différentiable en a et y admet un minimum (resp. maximum) local, alors $D^2 f(a)$ est positive (resp. négative).*
3. *Si f est deux fois différentiable en a, que $Df(a) = 0$ et que $D^2 f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) local strict en a.*

Remarque 34 ***(Cas dégénérés, [BMP] p.18)*** *Si on est dans une situation où les premières différentielles ne permettent pas de conclure, la considération du développement de Taylor à un ordre supérieur peut apporter de l'information. Considérons par exemple une fonction f quatre fois dérivable en a, à valeurs réelles et telle que $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ est positive mais non définie. Pour $h \in \ker D^2 f(a)$ on a :*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{6} D^3 f(a)(h)^3 + \frac{1}{24} D^4 f(a)(h)^4 + o\left(\|h\|^4\right),$$

et on peut donc énoncer le résultat suivant : si f admet un minimum local en a, alors $D^3 f(a)(h)^3 = 0$ et $D^4 f(a)(h)^4 \geq 0$ pour tout $h \in \ker D^2 f(a)$. Attention, l'énoncé réciproque est faux (contrairement à ce qui est écrit *dans [BMP]!): même si $D^3f(a)(h)^3 = 0$ et $D^4f(a)(h)^4 > 0$ pour tout $h \in \ker D^2f(a)$, $h \neq 0$, alors f n'admet pas forcement un minimum local en a (on pourra considérer $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + y^4$).*

Théorème 35 ***(Théorème des extrema liés, version analytique)*** *Soient $f,g_1,\dots,g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, et*

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_i(x) = 0, \forall\ i = 1,\dots,p\}.$$

Si la restriction de f à Γ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et que la famille $(Dg_1(a),\dots,Dg_p(a))$ est libre, alors il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a).$$

La preuve de ce résultat nécessite un lemme algébrique indépendant.
Lemme 36 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\varphi,\varphi_1,\dots,\varphi_p$ des formes linéaires sur E. Alors*

$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_p) \Longleftrightarrow \cap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i) \subset \ker\varphi$$

Preuve. L'implication $(\Rightarrow)$ est immédiate. Démontrons $(\Leftarrow)$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Vect}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$. En passant à l'orthogonal, il vient

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_p)^\perp \subset \mathrm{Vect}(\varphi)^\perp$$

Or $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_p)^\perp = \cap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$ ce qui prouve le résultat. $\square$

Preuve du théorème. Notons $T_a\Gamma$ le plan tangent à Γ en a, c'est à dire

$$T_a\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^n, \exists\gamma \in C^1([-1,1],\Gamma), \gamma(0) = a, \gamma'(0) = \xi\}.$$

On montre facilement que $T_a\Gamma = \cap_{i=1}^{p} \ker(Dg_i(a))$. Par ailleurs, comme $f_{|\Gamma}$ possède un extremum en a, alors pour toute courbe régulière γ de Γ telle que $\gamma(0) = a$, on a $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = 0$. Par suite, $Df(a)(\gamma'(0)) = 0$ ce qui prouve que $Df(a) = 0$ sur $T_a\Gamma$. Par suite $\cap_{i=1}^{p} \ker(Dg_i(a)) \subset \ker Df(a)$ et en utilisant le Lemme précédant, il vient $Df(a) \in \mathrm{Vect}(Dg_1(a),\dots,Dg_p(a))$. Autrement dit, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a).$$

Ceci prouve le résultat. $\square$

4 Géométrie différentielle

Définition 37 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que f est un C^k difféormorphisme local en a s'il existe des voisinages U_a de a et V_a de $f(a)$ tels que $f : U_a \to V_a$ est un difféormorphisme et $f \in C^k$.*
2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que f est une C^k-immersion en a, si $f \in C^k$ et $Df(a)$ est injective.*
3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ et $a \in U$. On dit que f est une C^k-submersion si $f \in C^k$ et $Df(a)$ est surjective.*

Théorème 38 - **Forme normale locale des immersions.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une C^k-immersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors, il existe un C^k diffeormorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que*

$$\phi \circ f(x_1, \ldots ,x_p) = (x_1, \ldots ,x_p,0, \ldots ,0).$$

- **Forme normale locale des submersions.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une C^k-submersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors, il existe un C^k diffeormorphisme local ψ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que*

$$f \circ \psi(x_1, \ldots ,x_n) = (x_1, \ldots ,x_{n-p}).$$

Preuve. Appliquer le théorème d'inversion locale à

- $g : (x_1, \ldots ,x_p,y_{p+1}, \ldots ,y_n) \mapsto (f_1(x), \ldots ,f_p(x),f_{p+1}(x)+y_{p+1}, \ldots ,f_n(x)+y_n)$ où $x = (x_1, \ldots ,x_p)$ et où on a éventuellement interverti les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ de sorte que $(\partial_i f_j)_{1\le i,j\le p}$ soit inversible. Prendre $\phi = g^{-1}$.
- $h : (x_1, \ldots ,x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots ,f_{n-p}(x),x_{n-p+1}, \ldots ,x_n)$ où on a éventuellement interverti les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ de sorte que $(\partial_i f_j)_{1\le i,j\le n-p}$ soit inversible. Prendre $\psi = h^{-1}$.

□

Définition 39 (Sous-variété différentielle) *Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété différentielle de classe C^k et de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite:*

1. *pour tout $a \in M$ il existe un voisinage de U de a dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^k-difféormorphisme $\theta : U \to V$ tel que*

$\theta(M \cap U) = \mathbb{R}^p \times \{0\} \cap V$.

2. *pour tout $a \in M$ il existe un voisinage de U de a dans $\mathbb{R}^n$ et une C^k-submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $M \cap U = \theta^{-1}(0)$.*
3. *pour tout $a \in M$ il existe un voisinage de U de a dans $\mathbb{R}^p$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une C^k-immersion $f : U \to V$ tel que $M \cap V = \theta(U)$.*

Exemple 40 *La sphère unité de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$*

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d, \, \|x\| = 1\}.$$

est une sous-variété de dimension $d-1$. En effet, on $\mathbb{S}^{d-1} = \theta^{-1}(0)$ ou $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est la submersion définie par $\theta(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j^2$.

Définition 41 (Espace tangent) *Soit M une sous-variété différentielle de classe C^k et de dimension p de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in M$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur tangent à M en a s'il existe $\delta > 0$ et une courbe $\gamma :]-\delta,\delta[\to M$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. L'ensemble T_aM des vecteurs tangents à M en a est appelé espace tangent à M en a (on verra que c'est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension p).*

Proposition 42 *Soit M une sous-variété différentielle de classe C^k et de dimension p de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in M$.*

- *Si $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un C^1-difféomorphisme local en a tel que localement $\theta(M) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ avec $\theta(a) = 0$, alors $T_aM : D\theta(0)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$.*
- *si $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une C^1-submersion en a telle que localement $M = \theta^{-1}(0)$ et $\theta(a) = 0$, alors $T_aM = ker D\theta(a)$.*
- *si $\theta : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une C^1-immersion en a telle que localement $M = \theta(\mathbb{R}^p)$ et $\theta(0) = a$, alors $T_aM = D\theta(0)(\mathbb{R}^p)$.*

Exemple 43

1. *$\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ avec $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$, $Df(x)(v) = 2\langle x,v \rangle$ et $T_x\mathbb{S}^n = \ker Df(x) = x^\perp$.*
2. *L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Preuve. On a $O_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \, f(X) = 0\}$, où $f(X) = X^tX - I_n$. L'application f est clairement C^∞ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et sa différentielle est donnée par

$$Df(X)H = H^tX + X^tH$$

De plus $Df(X)$ est surjective pour tout X. En effet, pour tout $Y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $Y = Df(X)H$ avec $H = (X^t)^{-1}Y$. Comme $dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, la caractérisation par les submersions montre que $O_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. L'espace tangeant à $O_n(\mathbb{R})$ en X est l'espace des matrices H telles que

$$H^t X = -X^t H.$$

Lorsque $X = I_n$ c'est exactement l'espace des matrices antisymétriques. $\square$

Théorème 44 ***(Théorème des extrema liés formulation géométrique)*** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Soit Γ une sous-variété locale de $\mathbb{R}^n$ en $a \in U$. On suppose que $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en a. Alors le gradient de f en a est orthogonal au plan tangent à Γ en a.*

Preuve du théorème. Supposons que $f_{|\Gamma}$ possède un extremum en a. Alors pour toute courbe régulière γ de Γ telle que $\gamma(0) = a$, on a $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = 0$. Par suite, $Df(a)(\gamma'(0)) = 0$ ce qui prouve que $Df(a) = 0$ sur $T_a\Gamma$. En terme de gradient, cette identité s'écrit $\langle \nabla f(a), \xi \rangle = 0$, pour tout $\xi \in T_a\Gamma$, c'est à dire $\nabla f(a) \perp T_a\Gamma$. $\square$

Références

[BMP] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H-K, 2005.

[P] A. Pommellet. *Agrégation de Mathématiques, Cours d'analyse.* Ellipses, 1994.

[R] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2009.