Exercices de révision en calcul différentiel

L. Michel

21 septembre 2021

Exercice 1 *Soit H un espace préhilbertien. Montrer que l'application $x \mapsto ||x||$ est différentiable en tout point $a \neq 0$ et trouver sa différentielle.*

Exercice 2 ***Exemples importants de différentielles, [R], p.56.*** *On munit l'espace E des matrices réelles carrées de taille n d'une norme telle que $\|XY\| \leq \|X\| \, \|Y\|$ (norme matricielle). On note $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de E et on pose $f(X) = X^{-1}$ pour $X \in U$.*

1. *Montrer que pour tout $H \in E$ avec $\|H\| < 1$, la matrice $I_n - H$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{\infty} H^k$. En déduire que U est un ouvert de E.*
2. *Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série entière à coefficients réels, convergente au voisinage de l'origine. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\sum_{k=p}^{\infty} a_k X^k = O(\|X\|^p)$ lorsque $\|X\| \to 0$ dans E.*
3. *Calculer $Df(I_n)$. En déduire $Df(X)$ pour $X \in U$.*
4. *Calculer $D\exp(0)$.*

Exercice 3 ***L'identité d'Euler, [R], p.66*** *Soient $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point et $k \in \mathbb{R}$ une constante. On dit que f est homogène de degré k si pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $f(tx) = t^k f(x)$. Montrer que f est homogène de degré k si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \nabla f(x) \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k\, f(x)$$

Indication: on pourra dériver la fonction $t \mapsto t^{-k} f(tx)$.

Exercice 4 ***Les coordonnées polaires, [R] p.64.***

1. *Montrer que* $\Phi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *est une bijection de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0,\ y = 0\}$ *et que sa réciproque est aussi de classe* $\mathscr{C}^1$ *(on dit que* Φ *est un* $\mathscr{C}^1$ *difféomorphisme).*
2. *Si* $f(x,y) = g(r,\theta)$*, donner les formules de passage entre les dérivées partielles de* f *et* g*.*
3. *On pose* $f(x,y) = h(x,\theta)$*. Comparer les dérivées partielles par rapport à* x *de* f *et* h*. Expliquer.*

Exercice 5 ***La différentielle du déterminant, [R], p.74.*** *On note* det *la fonction déterminant et* tr *la fonction trace sur l'espace* E *des matrices réelles carrées de taille* n*.*

1. *Montrer que* det *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* E *et que* $D\det(I_n) = \mathrm{tr}$*.*
2. *En déduire que pour tous* X, $H \in E$*, on a*
$$D\det(X)H = \mathrm{tr}({}^t\tilde{X}H),$$
où $\tilde{X}$ *est la comatrice de* X*.*
3. *Soient* $y_1,\dots,y_n$ *des solutions (à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*) du système différentiel linéaire* $y' = A(t)y$ *où* $A(t) \in E$ *est une fonction continue de* t*. Soit* $w(t) = \det(y_1(t),\dots,y_n(t))$ *leur déterminant wronskien. Montrer que* $w'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\,w(t)$*. En déduire* $\det(e^{tA})$ *pour* A *constante.*

Exercice 6 *Soient* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *deux applications différentiables. Déterminer* $\nabla(f\circ g)$ *en fonction de* ∇f*.*

Exercice 7 *Soit* $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ *une fonction continue sur* $[a;b]$ *et dérivable sur* $]a;b[$*. Peut-on affirmer l'existence d'un point* $c \in]a;b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)$*?*

Exercice 8 ***Résolution d'équations, [R] p.97.*** *On propose de montrer, sans utiliser de théorème de point fixe, que le système d'équations suivant admet au plus une solution.*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(x+y) \\ y = \dfrac{1}{2}\cos(x-y) \end{cases}$$

1. *On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme Euclidienne. Montrer que l'application $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\sin(x+y), \cos(x-y))$ est de classe C^1 et montrer que $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|Df(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*
2. *Conclure en utilisant l'inégalité des accroissements finis.*

Exercice 9 *Que peut-on dire d'une fonction f différentiable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et vérifiant $Df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$?*

Exercice 10 ***Une suite dense sur le cercle, [R] p. 99.*** *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et dérivable. On suppose que $f(x)$ croit vers $+\infty$ et que $f'(x)$ décroit vers 0 pour $x \to +\infty$. Montrer que les points $e^{if(n)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont denses dans le cercle unité.*

Exercice 11 ***Prolongement de fonctions, [D] p.73.*** *Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Soit $f : \Omega = B(0_E,1) \setminus \{0_E\} \to F$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose Df bornée sur Ω.*

1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Ω qui converge vers 0_E. On suppose que pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, $0_E \notin [x_n,x_m]$. Montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F.*
2. *On suppose $\dim E > 1$. Montrer que pour tous x, $y \in \Omega$, il existe $a \in \Omega$ tel que $\|a-x\| + \|a-y\| \leq 2\|x-y\|$ et $0_E \notin [x,a] \cup [a,y]$. En déduire que f se prolonge par continuité sur $B(0_E,1)$.*
3. *On suppose de plus que $\lim_{x\to 0_E} Df(x) = L \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Montrer que le prolongement de f est différentiable en 0.*
4. *Les résultats précédents sont ils vrais en dimension 1?*

Exercice 12 *Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique réel $x(\lambda) > 0$ tel que $2 - e^{\lambda x} = \log x$, et que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Exercice 13 *Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est suffisament proche de Id, alors il existe une matrice M telle que $M^2 = A$.*

Exercice 14 ***Contre-exemples, [R] p. 192.***

1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local, mais n'est pas un difféomorphisme global. Que peut-on en déduire pour la fonction holomorphe $z \mapsto z^2$?*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x + x^2\sin(\pi/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est pas inversible au voisinage de 0.*

Exercice 15 ***Cas simple du théorème d'Hadamard-Lévy, [R] p.221.*** *Soient $k > 0$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$. On va montrer que f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.*

1. *Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé.*
2. *Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*
3. *Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert et conclure.*

Exercice 16 ***Isométries et inversion locale, [G] p. 329.*** *Soit E un espace euclidien de dimension finie. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $x \in E$, $Df(x)$ est une isométrie de E.*

1. *Pour tout $a \in E$, montrer l'existence d'un ouvert U_a contenant a tel que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x,y \in U_a$.*
2. *Montrer que pour tout x et $y \in U_a$, $\forall h,l \in E \quad \langle Df(x)(h),Df(y)(l)\rangle = \langle h,l\rangle$. En déduire que $Df(x) = Df(y)$ pour tout x et $y \in U_a$.*
3. *Montrer que f est une isométrie affine de E sur E.*

Exercice 17 ***Redressement d'un champ de vecteurs, [R] p.204.*** *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $v : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$. On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} y'(t) = v(y(t)) \\ y(0) = x, \end{cases}$$

avec $x \in U$, et φ le flot associé. On veut montrer que si $v(0) \neq 0$, il existe f un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme local au voisinage de 0, tel que si on note $y = f(Y)$, $x = f(X)$ et $V = (1,0,\dots,0)^t$, Y vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} Y'(t) = V \\ Y(0) = X. \end{cases}$$

1. *Traiter le cas où $n = 1$.*
2. *Pour $n \geq 2$, montrer que $f : (t,x_2,\dots,x_n) \mapsto \varphi_t(0,x_2,\dots,x_n)$ convient si on suppose $v_1(0) \neq 0$.*
3. *Redresser le champ $v(y_1,y_2) = (y_1,y_2)$ au voisinage du point $(1,0)$.*

Exercice 18 ***Le lemme d'Hadamard, [G] p.308.*** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.*

1. *On suppose $f(0) = 0$ et $k \geq 2$. Montrer qu'il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ telles que*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

2. *Si de plus $Df(0) = 0$ et $k \geq 3$, montrer qu'il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^{k-2}$ $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ telles que*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j h_{i,j}(x_1, \ldots, x_n).$$

Exercice 19 ***Lemme de Morse, [R] p.305.*** *On suppose que $0 \in U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, que $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^3$, que $Df(0) = 0$ et que $D^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. On veut montrer qu'il existe un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme local φ tel que $\varphi(0) = 0$ et si on note $u = \varphi(x)$, alors*

$$f(x) = f(0) + u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2.$$

1. *Montrer qu'on peut écrire*

$$f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x,$$

où $Q(x)$ est une matrice symétrique, $Q(0)$ est inversible et Q est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. *Soit A_0 une matrice symétrique inversible. Montrer qu'il existe ψ, $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme défini sur un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, tel que*

$$\psi(A_0) = I \quad \text{et} \quad A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A).$$

On pourra considérer $\gamma : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M A_0 M$.

3. *Conclure.*

Exercice 20 *Montrer que l'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille nxn et de déterminant 1 est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.*

Exercice 21 ***Étude locale d'une surface, [R] p.341.*** *Soit S la surface d'équation $z = f(x,y)$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$.*

1. *En supposant $D^2 f(a)$ non dégénérée, discuter de la position relative de S par rapport à son plan tangent en $(a,f(a))$.*
2. *Que peut-on dire si $D^2 f(a)$ est dégénérée?*

Exercice 22 *Soient a,b deux réels strictement positifs et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1\}$. Soit $f = D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. Discuter en fonction de a et b l'existence d'extrema de f.*

Exercice 23 *Soit $n \geq 2$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x_1 x_2 \ldots x_n$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n,\ x_1 + \ldots x_n = 1\}$.*

1. *Montrer que $f_{|K}$ admet un unique maximum global et le déterminer.*
2. *En déduire l'inégalité arithmético-géométrique: pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, on a*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Références

[D] P. Donato. *Calcul différentiel pour la licence*. Dunod, 2000.

[G] X. Gourdon. *Les maths en tête, Analyse*. Ellipses, 2008.

[L] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.

[R] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2009.