Equations aux dérivées partielles d'évolution

Master Analyse-EDP-Probabilités
Université de Bordeaux

Laurent Michel

Printemps 2021

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce cours est d'introduire des outils de résolution d'EDP d'évolution intervenant en physique mathématique (équation de la chaleur, équation des ondes, équation de Schrödinger). Dans un premier temps on considèrera des équations à coefficients constants sur l'espace Euclidien. Dans ce cas l'utilisation de la transformation de Fourier pour réduire l'étude de l'EDP à l'étude d'une famille d'EDO est un outil très puissant. On commencera donc ce cours par quelques rappels et compléments sur la transformation de Fourier et les espaces de Sobolev. On appliquera ensuite ces outils à l'étude l'équation de la chaleur et de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^d$.

Lorsque les EDP considérées ne sont pas à coefficients constants (ou lorsque l'on considère l'EDP sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$), on ne peut plus utiliser la transformation de Fourier pour résoudre de manière exacte. On présentera dans la seconde partie de ce cours des outils d'Analyse fonctionnelle permettant la résolution de tesl problèmes. On appliquera ensuite ces outils à des problèmes linéaires et semi-linéaires.

Les notes de ce cours reposent en partie sur un cours donné par A. Bachelot. Nous le remercions de nous avoir permis d'utiliser son materiel.

Chapitre 2

Compléments sur la transformée de Fourier

2.1 L'espace de Schwartz

Définition 2.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}_+$ est une seminorme si les propriétés suivantes sont satisfaites:*
i) $\forall x,y \in E, \mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$

On remarque qu'une seminorme n'est pas nécessairement définie-positive. C'est ce qui lui manque pour être une norme.

Nous allons définir l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$. Dans la suite, on utilisera les notations suivantes:

$$\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j,\, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_d},\, \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est appelé multi-indice. On notera $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$ et $D_x = \frac{1}{i}\nabla_x$.

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on notera $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \dots u_d^{\alpha_d}$. On dira que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_j \leq \beta_j$ pour tout j.

Dans tout le cours, on notera $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont indéfiniment dérivables. On notera $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ le sous espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à support compact.

Définition 2.2 *On note $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $p \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{|\alpha|,|\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)| < \infty$$

Proposition 2.3 *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre.*

Preuve. Il est clair que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par addition et multiplication par un scalaire. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, pour tout $u,v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a la formule de Leibniz

$$\partial^\beta(uv) = \sum_{\nu \leq \beta} \binom{\nu}{\beta} \partial^\nu u \partial^{\beta-\nu} v$$

Si $u,v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on déduit facilement de cette formule que $uv \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Proposition 2.4 *Pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'application $\mathcal{N}_p$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\mathcal{N}_p(\varphi) := \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|$$

est une seminorme.
Preuve. C'est évident. $\square$

Proposition 2.5 *Pour tout $u,v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on pose*

$$d_{\mathscr{S}}(u,v) := \sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{-p} \frac{\mathcal{N}_p(u-v)}{1+\mathcal{N}_p(u-v)} \tag{2.1}$$

L'application $d_{\mathscr{S}}$ est une distance sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En outre, pour toute suite (φ_k) de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $d_{\mathscr{S}}(\varphi_k,\varphi) \to 0$ quand $k \to \infty$ si et seulement si $\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi) \to 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Preuve. Montrons d'abord que $d_{\mathscr{S}}$ est une distance. Il est clair que $d_{\mathscr{S}} \geq 0$ et que si $d_{\mathscr{S}}(u,v) = 0$ alors $u = v$. Pour établir l'inégalité triangulaire, on commen ce par remarquer que la fonction $\phi : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est croissante. Donnons nous $u,v,w, \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{N}_p(u-v) \leq \mathcal{N}_p(u-w) + \mathcal{N}_p(w-v)$$

et comme ϕ est croissante, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}_p(u-v)}{1+\mathcal{N}_p(u-v)} &\leq \frac{\mathcal{N}_p(u-w)}{1+\mathcal{N}_p(u-w)+\mathcal{N}_p(w-v)} + \frac{\mathcal{N}_p(w-v)}{1+\mathcal{N}_p(u-w)+\mathcal{N}_p(w-v)} \\ &\leq \frac{\mathcal{N}_p(u-w)}{1+\mathcal{N}_p(u-w)} + \frac{\mathcal{N}_p(w-v)}{1+\mathcal{N}_p(w-v)} \end{aligned}$$

On en déduit aisément l'inégalité triangulaire.

Supposons maintenant que (φ_k) est une suite de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour $d_{\mathscr{S}}$. On remarque que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\phi(\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi)) \leq 2^p d_{\mathscr{S}}(\varphi_k - \varphi)$. Or, la fonction ϕ est continue, strictement croissante, bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. On en déduit que si $d_{\mathscr{S}}(\varphi_k - \varphi) \to 0$ alors $\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi) \leq \phi^{-1}(2^p d_{\mathscr{S}}(\varphi_k - \varphi)) \to 0$.

Supposons maintenant que (φ_k) est une suite de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi) \to 0$ pour tout p. On fixe $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme la série $\sum_p 2^{-p}$ converge, il existe $P \geq 0$ tel que $\sum_{p \geq P} 2^{-p} < \epsilon/2$. On en déduit que

$$\sum_{p \geq P} 2^{-p} \frac{\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi)}{1+\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi)} < \epsilon/2$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, puisque pour tout $p = 1,\ldots,P-1$, on a $\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi) \to 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq K,\ \sum_{p=1}^{P-1} 2^{-p} \frac{\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi)}{1+\mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi)} < \epsilon/2.$$

On conclut en sommant les deux dernières inégalités. □

Exercice 2.6 *Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction à valeurs réelles, égale à 1 sur $B(0,1)$, nulle en dehors de $B(0,2)$. On note $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la suite $\varphi_n = \chi_n\varphi$ converge vers φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. Supposons que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est fixée et considérons la suite de fonctions $\varphi_n = \chi_n\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on déduit de la formule de Leibniz que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p(\varphi - \varphi_n) = \mathcal{N}_p((1-\chi_n)\varphi) &= \sup_{|\alpha|,|\beta|\leq p} |x^\alpha \partial_x^\beta((1-\chi_n)\varphi| \\
&\leq \sup_{|\beta|\leq p} \sum_{\nu\leq\beta} \binom{\nu}{\beta} \sup_{|\alpha|\leq p} |x^\alpha \partial_x^\nu(1-\chi_n)\partial_x^{\beta-\nu}\varphi| \\
&\leq \frac{C}{n} \sup_{|\alpha|\leq p+1,|\beta|\leq p} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi| \to 0
\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$. □

Proposition 2.7 *On a les inclusions suivantes (valables pour tout $p \in [1,\infty]$)*

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$$

et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Les inclusions sont évidentes. La densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est une conséquence immédiate de l'exercice précédent. □

Proposition 2.8 *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $P \in \mathbb{C}[x]$ alors les applications $f \mapsto \partial_x^\alpha f$ et $f \mapsto Pf$ sont linéaires continues sur $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d),d_{\mathscr{S}})$*

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_p(\partial_x^\alpha\varphi) \leq \mathcal{N}_{p+|\alpha|}(\varphi)$$

et

$$\mathcal{N}_p(P\varphi) \leq C\mathcal{N}_{p+\deg P}(\varphi).$$

pour une certaine constante $C > 0$. □

Théorème 2.9 *L'espace $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d),d_{\mathscr{S}})$ est complet.*

Preuve. Soit (φ_n) une suite de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ de Cauchy pour $d_{\mathscr{S}}$. On a

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \sum_{p\in\mathbb{N}} 2^{-p}\phi(\mathcal{N}_p(\varphi_n - \varphi_m)) < \epsilon \tag{2.2}$$

où $\phi(t) = t/(1+t)$. De l'inégalité $\mathcal{N}_p \leq \phi^{-1}(2^p d_{\mathscr{S}})$ et de la continuité de ϕ^{-1} en 0, on déduit donc que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \mathcal{N}_p(\varphi_n - \varphi_m) < \epsilon \tag{2.3}$$

En particulier, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta (\varphi_n - \varphi_m)| < \epsilon \tag{2.4}$$

En prenant $\beta = 0$, on en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha (\varphi_n - \varphi_m)| < \epsilon$$

Par conséquent pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite (φ_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}^k(K)$. Elle admet donc une limite $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Faisons $m \to \infty$ dans (2.4). On obtient

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta (\varphi_n - \varphi)| < \epsilon \tag{2.5}$$

Comme cette estimation est valable pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, ceci montre que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_p(\varphi_n - \varphi) \to 0$ quand $n \to \infty$. C'est exactement la convergence de (φ_n) vers φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Proposition 2.10 *Soient $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi * \psi$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$. On remarque qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^d, |x|^{|\alpha|} \leq C_\alpha(|y|^{|\alpha|} + |x-y|^{|\alpha|})$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial_x^\beta (u*v)| &\leq |x|^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_x^\beta u(x-y) v(y)| dy \\ &\leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} (|y|^{|\alpha|} + |x-y|^{|\alpha|}) |\partial_x^\beta u(x-y)||v(y)| dy \\ &\leq C_\alpha \big(\||x|^{|\alpha|}\partial_x^\beta u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\partial_x^\beta u\|_{L^2} \||y|^{|\alpha|} v\|_{L^2} \big) \end{aligned}$$

qui est fini car $u,v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

2.2 Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}$

Soit u une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}u(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x) dx. \tag{2.6}$$

Ici et dans dans toute la suite $x\xi$ désigne le produit scalaire entre les vecteurs $x \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$. On utilisera parfois la notation $\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}\varphi(\xi)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on notera $|x|$ la norme euclidienne de x et $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Comme $\mathscr{S} \subset L^1$, la transformée de Fourier est bien définie sur $\mathscr{S}$.

Théorème 2.11 *L'application $\mathcal{F}$ est linéaire continue de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a*

i) $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi)(\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}\varphi(\xi)$

ii) $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ D_\xi^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi)$

Preuve. Laissée en exercice. □

Exercice 2.12 *Soit A une matrice réelle symétrique définie positive et $g_A(x) = e^{-\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle}$. Montrer que*

$$\mathcal{F}(g_A)(\xi) = \frac{1}{(detA)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}.$$

Théorème 2.13 *L'application $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est un isomorphisme et son inverse est donné par*

$$\mathcal{F}^*\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} u(\xi) d\xi.$$

Remarque 2.14 **1)** *L'identité $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}$ peut s'écrire*

$$f(x) = \int e^{ix\xi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}f(\xi) d\xi$$

pour tout $f \in \mathscr{S}$. La fonction f peut être vue comme une superposition d'ondes planes de fréquence ξ.
2) *Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, notons $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. On a alors les identités*

$$\mathcal{F}^*\varphi(x) = \mathcal{F}\varphi(-x),\ \mathcal{F}\check{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}^*\varphi(x),\ \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi = \check{\varphi}$$

Preuve du théorème: Soient $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_x)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_\xi)$. Alors la fonction

$$(x,\xi) \mapsto e^{i(x-y)\xi}\varphi(x)\psi(\xi)$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini, à

$$I(\psi) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi} e^{i(x-y)\xi}\varphi(y)\psi(\xi) dy d\xi.$$

Il vient

$$I(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d_\xi} e^{ix\xi}\psi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d_x} \varphi(y)\mathcal{F}\psi(y-x)dy. \tag{2.7}$$

On introduit la famille de fonctions $\psi_a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $a > 0$ définie par $\psi_a(\xi) = e^{-a^2|\xi|^2}$. En appliquant le théorème de convergence dominée au premier terme de (2.7), on obtient

$$\lim_{a\to 0^+} I(\psi_a) = \int_{\mathbb{R}^d_\xi} e^{ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}^*\mathcal{F}\varphi(x). \tag{2.8}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{F}\psi(y-x) = (2a^2)^{-\frac{d}{2}} e^{-|x-y|^2/(4a)^2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} I(\psi_a) &= (2a^2)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d_x} \varphi(y) e^{-|x-y|^2/(4a)^2} dy \\ &= 2^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d_x} \varphi(x+2ay) e^{-y^2} dy \end{aligned} \tag{2.9}$$

En appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{a\to 0^+} I(\psi_a) = 2^{\frac{d}{2}} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d_x} e^{-y^2} dy = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \varphi(x) \tag{2.10}$$

En combinant (2.8) et (2.10) on obtient le résultat annoncé. □

Remarque 2.15 *Comme sous produit de la démonstration, on a l'identité ci dessous valable pour tout* $\varphi,\psi \in \mathscr{S}$*:*

$$I(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d_\xi} e^{ix\xi} \psi(\xi) \mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d_x} \varphi(y) \mathcal{F}_{\xi\to x}\psi(y-x) dy. \tag{2.11}$$

Proposition 2.16 *Pour tout* $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*, on a*

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi)$$

et

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}\varphi \mathcal{F}\psi$$

Preuve. Appliquons (2.11) avec $\varphi = \mathcal{F}^* f$, $f \in \mathscr{S}$. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^* f(y) \mathcal{F}^*\psi(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \psi(\xi) f(\xi) d\xi$$

c'est à dire $\mathcal{F}^* f * \mathcal{F}^*\psi = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^*(f\psi)$. En remplaçant f par $\check{f}$ et ψ par $\check{\psi}$ et en utilisant l'identité $\mathcal{F}^*\check{f} = \mathcal{F}f$, il vient $\mathcal{F}f * \mathcal{F}\psi = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f\psi)$. Cela prouve la première identité.

Pour démontrer la second identité, on remplace φ,ψ par $\mathcal{F}^*\varphi,\mathcal{F}^*\psi$ dans la première identité. Il vient

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^*\varphi\mathcal{F}^*\psi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \varphi * \psi$$

et en appliquant $\mathcal{F}$, on obtient

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) = \mathcal{F}\mathcal{F}(\mathcal{F}^*\varphi\mathcal{F}^*\psi) = \mathcal{F}^*\varphi(-\xi)\mathcal{F}^*\psi(-\xi) = \mathcal{F}\varphi(\xi)\mathcal{F}\psi(\xi)$$

ce qui prouve la seconde identité. □

On a les identités intégrales suivantes:

Théorème 2.17 *Pour tout* $\varphi,\psi \in \mathscr{S}$*, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathcal{F}(\psi)(x) dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\overline{\psi}(\xi) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\mathcal{F}(\psi)(-x)} dx,$$

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle \varphi,\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

En particulier, l'application $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ s'étend de manière unique en une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur lui même. De plus $\mathcal{F}^*$ est l'adjoint de $\mathcal{F}$ pour le produit scalaire usuel sur L^2.

Preuve. Les deux premières identités découlent immédiatement du Théorème de Fubini.

Remplaçons ψ par $\mathcal{F}\psi$ dans la seconde identité. Il vient

$$\langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}\psi(-x)}dx = \langle \varphi,\psi\rangle_{L^2}$$

ce qui prouve la dernière identité. On en déduit que l'application $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to L^2$ est une isométrie. Comme $\mathscr{S}$ est dense dans L^2, cette application se prolonge de manière unique en une isométrie de L^2 dans L^2. De plus la seconde identité montre que $\mathcal{F}^*$ est l'adjoint de $\mathcal{F}$.

Un raisonnement identique montrer que $\mathcal{F}^*$ s'étend en une isométrie de L^2 dans L^2. Enfin, les identités $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathrm{Id}$ (et $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathrm{Id}$) valable sur $\mathscr{S}$ s'étendent par densité à L^2 ce qui montre que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ sont surjectives sur L^2. □

Exercice 2.18 (Principe d'incertitude) *Soit $f \in \mathscr{S}$. Montrer que pour tout $j = 1,\dots,n$, on a*

$$\|x_j f\|_{L^2}\|\xi_j \mathcal{F}f\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}\|\mathcal{F}f\|_{L^2}.$$

2.3 L'espace des distributions tempérées

Définition 2.19 *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Leur ensemble est noté $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On dit qu'une suite (T_n) de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ converge vers $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ si*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \to \langle T,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}.$$

quand $n \to \infty$.

Exemple 2.20 *On a les injections continues suivantes:*

i) pour tout $p \in [1,\infty]$, $L^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$

ii) $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2.21 *Montrer que $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 2.22 *Soit $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. Alors T est une distribution tempérée si et seulement si il existe $K \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle T,\varphi\rangle| \leq C\mathcal{N}_K(\varphi) \tag{2.12}$$

Preuve. Il est clair que si T vérifie (2.12) alors $T \in \mathscr{S}'$.

Réciproquement, supposons par l'absurde que $T \in \mathscr{S}'$ ne vérifie (2.12) pour aucunes constantes K,C. Alors, il existe une suite (φ_j) de $\mathscr{S}'$ telle que

$$\forall j \geq 1,\ |\langle T,\varphi_j\rangle| \geq j\mathcal{N}_j(\varphi_j). \tag{2.13}$$

avec $\mathcal{N}_j(\varphi_j) \neq 0$ pour tout j. On considère alors les fonctions $\psi_j = \varphi_j/(j\mathcal{N}_j(\varphi_j))$. On a

$$|\langle T,\psi_j\rangle| \geq 1, \forall j \geq 1$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{N}_p(\psi_j) = \frac{1}{j}\frac{\mathcal{N}_p(\psi_j)}{\mathcal{N}_j(\psi_j)}.$$

Comme on a $\mathcal{N}_p \leq \mathcal{N}_j$ pour tout $j \geq p$, on en déduit que $\mathcal{N}_p(\psi_j) \to 0$ quand $j \to \infty$ pour tout p. Par conséquent, (ψ_j) tend vers 0 dans $\mathscr{S}'$ et comme T est continue on en déduit $(\langle T,\psi_j\rangle) \to 0$, ce qui contredit (2.13). $\square$

Proposition 2.23 *L'application de restriction $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \mapsto T_{|\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$ est une injection linéaire continue de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{D}'$.*

Preuve. La linéarité est évidente. Pour montrer l'injectivité, on suppose que $T_{|\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0$. Alors $T\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et que T est continue sur $\mathscr{S}$. On en déduit $T\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Cela prouve l'injectivité.

Supposons maintenant que $T_n \to T$ dans $\mathscr{S}'$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi \in \mathscr{S}$. Par suite,

$$\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \to \langle T,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T,\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$$

quand $n \to \infty$. Ceci prouve que $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'$. $\square$

Théorème 2.24 (Principe de bornitude uniforme) *Soit (T_n) une suite de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la suite $(\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}| \leq C\mathcal{N}_p(\varphi)$$

Preuve. La démonstration de ce résultat est une variante de la preuve du théorème de Banach-Steinhaus. Elle repose sur le Lemme de Baire que nous rappelons sans démonstration:

Lemme 2.25 *Soit (E,d) un espace métrique complet et soit (F_n) une suite de fermés d'interieurs vides. Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est d'interieur vide.*

Utilisons ce lemme pour démontrer le théorème. On introduit les ensembles

$$F_j = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \forall n \in \mathbb{N}, |\langle T_n,\varphi\rangle| \leq j\}$$

Comme les T_n sont continues sur $\mathscr{S}'$, les F_j sont fermés comme intersection de fermés. De plus, puisque pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la suite $(\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $\cup_{j\in\mathbb{N}}F_j = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ qui est bien sur d'interieur non vide. Par conséquent, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_K \neq \emptyset$. Par suite, il existe $\varphi_0 \in \mathscr{S}$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\{\varphi \in \mathscr{S}, d_{\mathscr{S}}(\varphi,\varphi_0) < 2\epsilon\} \subset F_K$$

On en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que

$$\{\varphi \in \mathscr{S}, \mathcal{N}_p(\varphi - \varphi_0) < \epsilon\} \subset F_K$$

Posons $M = K + \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle T,\varphi_0\rangle|$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}'$ tel que $\mathcal{N}_p(\varphi) \leq 1$, on a

$$|\langle T_n,\varphi\rangle| = \frac{1}{\epsilon}|\langle T_n,\epsilon\varphi\rangle| \leq \frac{1}{\epsilon}\big(|\langle T_n,\epsilon\varphi - \varphi_0\rangle| + |\langle T_n,\varphi_0\rangle|\big) \leq \frac{M}{\epsilon}$$

ce qui montre la borne annoncée. □

Du principe de bornitude uniforme on déduit le résultat suivant:

Théorème 2.26 *Soit (T_n) une suite de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la suite $(\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. Alors, la suite (T_n) converge dans $\mathscr{S}'$.*

Preuve.

Supposons donc que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$, $(\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ et notons $T\varphi$ sa limite. Un argument classique montre que $\varphi \mapsto T\varphi$ est linéaire. La continuité de T est une conséquence du théorème de bornitude uniforme. □

Exercice 2.27 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la distribution tempérée*

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^{2k}$$

Montrer que la suite (T_n) converge dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ mais ne converge pas dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

On définit maintenant par dualité des opérations naturelle sur les éléments de $\mathscr{S}'$.

Définition 2.28 *Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty$ une fonction telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe $C_\alpha > 0$ et $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $|\partial^\alpha \chi(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{N_\alpha}$. Pour tout $T \in \mathscr{S}'$ on définit $\chi T \in \mathscr{S}'$ par*

$$\langle \chi T,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T,\chi\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

Soit $T \in \mathscr{S}'$. Les dérivées de T sont définies par

$$\langle \partial_x^\alpha T,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = (-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial_x^\alpha \varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}.$$

Il est clair que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\alpha T \in \mathscr{S}'$.

Exercice 2.29 *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Montrer que $\partial_x^\alpha P$ est la dérivée de P au sens usuel.*

2.4 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$

2.4.1 Généralités

Définition 2.30 *Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de T par*

$$\langle \mathcal{F}(T),\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T,\mathcal{F}(\varphi)\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \tag{2.14}$$

Proposition 2.31 *L'application $\mathcal{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est linéaire, continue et prolonge la transformée de Fourier usuelle sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. On montre d'abord que $\mathcal{F}(\mathscr{S}') \subset \mathscr{S}'$. Il est clair que pour tout $T \in \mathscr{S}'$, la formule (2.14) définit une forme linéaire sur $\mathscr{S}$. Montrons que $\mathcal{F}(T)$ est continue. Supposons que (φ_n) est une suite de $\mathscr{S}$ qui converge vers φ dans $\mathscr{S}$. Comme $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est continue, alors

$$\mathcal{F}(\varphi_n) \to \mathcal{F}(\varphi), \ n \to \infty.$$

Comme $T \in \mathscr{S}'$, on en déduit que

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi_n \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T\mathcal{F}(\varphi_n) \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \to \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

ce qui prouve que $\mathcal{F}(T)$ est continue sur $\mathscr{S}'$.

La linéarité de $\mathcal{F}$ sur $\mathscr{S}'$ est une conséquence immédiate de la définition ci-dessus et de la linéarité de $\mathcal{F}$ sur $\mathscr{S}$.

Supposons que (T_n) est une suite de $\mathscr{S}'$ qui converge vers T dans $\mathscr{S}'$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$, on a $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathscr{S}$. Par suite

$$\langle \mathcal{F}(T_n), \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T_n\mathcal{F}(\varphi) \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \to \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

ce qui montre que $\mathcal{F}(T_n)$ tend vers $\mathcal{F}(T)$ dans $\mathscr{S}'$. Ceci prouve que $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ est continue.

Le fait que $\mathcal{F}$ prolonge la transformation de fourier usuelle sur $\mathscr{S}$ est une simple application du théorème de Fubini. □

Théorème 2.32 *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme continu de $\mathscr{S}'$ sur $\mathscr{S}'$. Son inverse est l'opérateur $\mathcal{F}^*$ défini par*

$$\langle \mathcal{F}^*T, \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T, \mathcal{F}^*\varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

De plus, on a les identités

i) $\forall T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(D_x^\alpha T) = \xi^\alpha \mathcal{F}\, T$

ii) $\forall T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $D_\xi^\alpha(\mathcal{F}T) = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha T)$

Preuve. On a clairement

$$\langle \mathcal{F}^*\mathcal{F}T, \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^*T \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^*\varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \langle T, \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

qui prouve que $\mathcal{F}^*\mathcal{F}T = T$. De même on a $\mathcal{F}\mathcal{F}^*T = T$ et par suite $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme continu de $\mathscr{S}'$ sur $\mathscr{S}'$ dont l'inverse est $\mathcal{F}^*$.

Les identités i) et ii) sont obtenues par dualité à partir des identités similaires sur $\mathscr{S}$. □

Exemple 2.33 *On a*

$$\mathcal{F}(\delta_{x=x_0}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-ix_0\xi}$$

et

$$\mathcal{F}(e^{i\eta x}) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \delta_{\xi=\eta}$$

Exercice 2.34 *Calculer les transformées de Fourier des distributions tempérées suivantes:* $\cos(x), e^{-|x|}, x^k, \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 2.35 *Soit A une matrice réelle symétrique régulière (i.e. $kerA = 0$). Alors*

$$\mathcal{F}(e^{\frac{i}{2}\langle Ax,x \rangle}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(A)}}{|\det(A)|^{1/2}} e^{-\frac{i}{2}\langle A^{-1}\xi,\xi \rangle},$$

avec $\mathrm{sgn}(A) = 2r - n$ *où r désigne le nombre de valeurs propres positives de A.*

2.4.2 Transformée de Fourier sur L^p

Pour tout $p \in [1,\infty]$, on a $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ donc $\mathcal{F}$ est bien défini sur L^p. Pour $p = 1$, on a pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f) \in L^\infty$ et

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-ix\xi} f(x)dx$$

Pour $p > 1$, on n'a pas de formule analogue. Par contre pour $p = 2$, on a le résultat fondamental suivant:

Théorème 2.36 *La transformée de fourier est un isomorphisme isométrique sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

Preuve. On a déjà vu que l'application $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ s'étendait de manière unique en une isométrie de L^2. Il s'agit donc de vérifier que $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ prolonge $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, ce qui a déjà été vu. $\square$

2.4.3 Transformée de Fourier sur $\mathcal{E}'$

On commence par rappeler les deux résultats sur la dérivation et l'intégration de crochets de distribution.

Théorème 2.37 **(Théorème de dérivation sous le crochet)** *Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution et soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ une fonction test supportée dans $K \times \mathbb{R}^p$ avec K compact. Alors la fonction*

$$y \mapsto \langle T,\varphi(.,y)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^p$ et on a

$$\partial_y^\alpha(\langle T,\varphi(.,y)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}) = \langle T,\partial_y^\alpha \varphi(.,y)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$$

Preuve. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$. D'après la formule de Taylor, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ on a

$$\varphi(x,y_0 + h) = \phi(x,y_0) + \sum_{j=1}^{d} \partial_{y_j}\phi(x,,y_0)h_j + r(x,y_0,h)$$

avec

$$r(x,y_0,h) = 2\sum_{|\alpha|=2} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_y^\alpha \varphi(x,y_0 + th)dt$$

Par théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction r est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x et on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et pour $|h| \le 1$

$$\sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha r(x,y_0,h)| \le C|h|^2 \sup_{x\in K, y\in B(y_0,1)} \sup_{|\beta|\le 2} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)|. \tag{2.15}$$

En particulier, $x \mapsto r(x,y_0,h)$ appartient à $\mathscr{D}$ pour tout h et on a

$$\langle T,\varphi(.,y_0 + h)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle T,\varphi(.,y_0)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} + \sum_{j=1}^{d} h^j \langle T,\partial_{y_j}\varphi(.,y_0)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} + \langle T,r(.,y_0,h)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$$

Comme $T \in \mathscr{D}'$, il existe $C > 0$ and $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\langle T,,r(.,y_0,h)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} \leq C \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\leq m} |\partial_x^\alpha r(x,y_0,h)|$$

et combiné avec (2.15), il vient

$$\langle T,,r(.,y_0,h)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} \leq C(\varphi)h^2$$

pour une certaine constante φ. On en déduit que

$$\langle T,\varphi(.,y_0+h)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle T,\varphi(.,y_0)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} + \sum_{j=1}^{d} h^j \langle T,\partial_{y_j}\varphi(.,y_0)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} + \mathcal{O}(|h|^2)$$

Ceci prouve que l'application $y \mapsto \langle T,\varphi(.,y)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$ est dérivable de dérivée $\langle T,\partial_y\varphi(.,y)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$. En itérant l'argument on obtient le résultat annoncé. $\square$

Théorème 2.38 *(***Théorème d'intégration sous le crochet)** *Soient $T \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ une distribution et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T,\varphi(.,y)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} dy = \left\langle T, \int \varphi(.,y)dy \right\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$$

Preuve. On fait la démonstration dans le cas $p = 1$. On a $\operatorname{supp}\varphi \subset K \times [-R,R]$ pour un certain $R > 0$. On introduit une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-R,R[)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(t)dt = 1.$$

Alors, la fonction

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) - \chi(y)\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,z)dz$$

est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et on voit facilement que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)dy = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Par suite, la fonction $(x,y) \mapsto \Psi(x,y)$ définie par

$$\Psi(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \psi(x,z)dz$$

est aussi $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et on a bien sur $\partial_y\Psi(x,y) = \psi(x,y)$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe crochet. Il vient

$$\partial_y\langle T,\Psi(.,y)\rangle = \langle T,\psi(.,y)\rangle$$

On intègre cette indentité entre sur $\mathbb{R}$. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \langle T,\psi(.,y)\rangle dy = \int_{-R}^{R} \langle T,\psi(.,y)\rangle dy = \langle T,\Psi(.,R)\rangle - \langle T,\Psi(.,-R)\rangle = 0$$

Or, on a

$$\langle T,\psi(.,y)\rangle = \langle T,\varphi(.,y) - \chi(y)\int_{\mathbb{R}}\varphi(.,z)dz\rangle = \langle T,\varphi(.,y)\rangle - \chi(y)\langle T,\int_{\mathbb{R}}\varphi(.,z)dz\rangle$$

En intégrant par rapport à y, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}}\langle T,\psi(.,y)\rangle dy = \int_{\mathbb{R}}\langle T,\varphi(.,y)\rangle dy - \langle T,\int_{\mathbb{R}}\varphi(.,z)dz\rangle\int_{\mathbb{R}}\chi(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\langle T,\varphi(.,y)\rangle dy - \langle T,\int_{\mathbb{R}}\varphi(.,z)dz\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. □

On peut maintenant démontrer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.39 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(T) \in \mathscr{S}' \cap \mathcal{C}^\infty$ et on a*

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\langle T,e^{-ix\xi}\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{C}^\infty}$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit

$$v(\xi) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\langle T,e^{-ix\xi}\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{C}^\infty}$$

Le théorème de dérivation sous le crochet montre que v est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|v(\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^m,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^d$$

Par suite $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et en appliquant le théorème d'intégration sous le crochet, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}'$, on a

$$\begin{aligned} \langle v,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\int\langle T,e^{-ix\xi}\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}\varphi(\xi)d\xi \\ &= \langle T,(2\pi)^{\frac{d}{2}}\int e^{-ix\xi}\varphi(\xi)d\xi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle T,\hat{\varphi}\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $T = v$. □

Chapitre 3

Compléments sur les espaces de Sobolev

3.1 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$

3.1.1 Généralités

Dans toute la suite, on notera $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 3.1 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev d'indice s par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d),\, \langle\xi\rangle^s \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

et

$$\|u\|_{H^s} = \|\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}(u)\|_{L^2}$$

Exercice 3.2 (Inégalité de Peetre) *Montrer que pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ il existe $C_\nu > 0$ tel que*

$$\langle x+y\rangle^\nu \leq C_\nu \langle x\rangle^\nu \langle y\rangle^{|\nu|}$$

pour tout $x,y \in \mathbb{R}^d$.

Théorème 3.3 *Soit $m \in \mathbb{N}$, alors*

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d),\, \partial^\alpha u \in L^2,\, \forall |\alpha| \leq m\}.$$

De plus $\|u\|_{H^m}$ est équivalente à $\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Exercice 3.4 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $T \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Attention l'indice s dépend de T!*

Proposition 3.5 *Soient $s,t \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^d$. On a les propriétés suivantes:*

1. *l'injection $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$ est dense.*
2. *$H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{H^s} = \int_{R^d} \langle\xi\rangle^{2s} \mathcal{F}(u)(\xi)\overline{\mathcal{F}(v)}(\xi)d\xi$$

3. $H^0 = L^2$

4. $s \leq t \to H^s \subset H^t$

5. $\partial^\alpha : H^s \to H^{s-|\alpha|}$ *est continue.*

Preuve. 1) Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et soit $v(\xi) = \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi)$. Alors $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Or, on sait que $\mathscr{S}$ est dense dans L^2. Par suite, il existe une suite (ψ_n) de $\mathscr{S}$ telle que $\psi_n \to v$ dans L^2. On définit

$$\varphi_n = \mathcal{F}^*(\langle \xi \rangle^{-s} \psi_n)$$

On a $\varphi_n \in \mathscr{S}$ et

$$\|\varphi_n - u\|_{H^S} = \|\langle \xi \rangle^s \mathcal{F}(\varphi_n - u)\|_{L^2} = \|\psi_n - \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}u\|_{L^2} \to 0$$

quand $n \to 0$.

2) Il est clair que $\langle .,. \rangle_{H^s}$ est un produit scalaire. De plus, on a

$$\langle u,v \rangle_{H^s} = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}v \rangle_{L^2(\langle \xi \rangle^{2s} d\xi)}$$

Supposons que (u_n) est une suite de Cauchy dans H^s. Alors $(\hat{u}_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$ qui est complet. Par suite, $(\hat{u}_n)$ admet une limite $v \in L^2(\langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$. On pose $u = \mathcal{F}^* v \in \mathscr{S}'$. Puisque $\mathcal{F}u = v \in L^2(\langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$ alors $v \in H^s$ et on a bien $u_n \to u$ dans H^s.

3) est évident.

4) est une conséquence immédiate de l'inégalité $\langle \xi \rangle^s \leq \langle \xi \rangle^t$ valable pour tout $s \leq t$.

5) Pour tout $u \in H^s \subset \mathscr{S}'$, on a $\mathcal{F}\partial^\alpha u = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}u$. Par suite,

$$\langle \xi \rangle^{s-|\alpha|} |\mathcal{F}\partial^\alpha u| \leq \langle \xi \rangle^{s-|\alpha|} |\xi|^{|\alpha|} |\mathcal{F}u| \leq \xi^s |\mathcal{F}u|.$$

On en déduit que $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$ et que

$$\|\langle \xi \rangle^{s-|\alpha|} \mathcal{F}\partial^\alpha u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^s}$$

ce qui prouve le résultat. □

Théorème 3.6 *Soit $s \in \mathbb{R}$ et soit $T \in (H^s(\mathbb{R}^d))'$. Alors*

$$\begin{aligned} J(T) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

définit un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. De plus $J(T) \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et l'application $J : (H^s)' \to H^{-s}$ est une isométrie bijective.

Preuve. Soit T une forme linéaire continue sur H^s. Pour tout $u \in H^s$, on a

$$|T(u)| \leq C \|u\|_{H^s}. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $u \in H^s$ et

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq \|u\|_{H^{|s|}}^2 \leq \int \langle \xi \rangle^{-d-1} \langle \xi \rangle^{2|s|+d+1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C \sup_{|\alpha| \leq |s|+d+1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha u|$$

En combinant cette estimation avec (3.1), on obtient la continuité de T en tant qu'opérateur de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que $J(T) \in \mathscr{S}'$. Montrons maintenant que $J(T) \in H^{-s}$. D'après le théorème de Riesz, il existe $w \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$T(u) = \langle u,w \rangle_{H^s},\, \forall u \in H^s \tag{3.2}$$

et $\|T\|_{(H^s)'} = \|w\|_{H^s}$. Autrement dit

$$T(u) = \int_{R^d} \hat{u}(\xi) \langle \xi \rangle^{2s} \overline{\hat{w}(\xi)} d\xi$$

Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, cette identité se réécrit

$$T(u) = \langle \mathcal{F}^*(\langle \xi \rangle^{2s} \overline{\hat{w}}), u \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

On a donc $T = \mathcal{F}^*(\langle \xi \rangle^{2s} \overline{\hat{w}})$ et par conséquent

$$\langle \xi \rangle^{-s} \mathcal{F}(T) = \langle \xi \rangle^{s} \overline{\hat{w}}.$$

Par définition, le membre de droite appartient à L^2 et par suite $T \in H^{-s}$. De plus on déduit immédiatement de l'identité ci-dessus que

$$\|T\|_{H^{-s}} = \|w\|_{H^s}$$

ce qui fournit la conclusion. $\square$

3.1.2 Espace de Sobolev et changement de variable

Théorème 3.7 *Soit $0 < s < 1$. Il existe une constante $A_s > 0$ telle que pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\|(1 + |\xi|^{2s})^{\frac{1}{2}} \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + A_s \iint |u(x) - u(y)|^2 |x-y|^{-d-2s} dxdy$$

De plus, cette quantité est équivalent à $\|u\|^2_{H^s}$.

Preuve. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$I := \iint |u(x) - u(y)|^2 |x-y|^{-d-2s} dxdy = \iint |u(x+y) - u(y)|^2 |x|^{-d-2s} dxdy$$

Par ailleurs, on voit facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la transformée de Fourier de $y \mapsto u(x+y) - u(y)$ est $\xi \mapsto (e^{ix\xi} - 1)\hat{u}(\xi)$. En appliquant l'égalité de Parseval, il vient

$$\int |u(x+y) - u(y)|^2 dy = \int |e^{ix\xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

et par suite

$$I = \iint |e^{ix\xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 |x|^{-d-2s} dxd\xi \tag{3.3}$$

Remarquons maintenant que la fonction

$$G_s(\xi) = \int |e^{ix\xi} - 1|^2 |x|^{-d-2s} dx$$

est bien définie car $0 < s < 1$ et $x \mapsto e^{ix\xi} - 1$ s'annule en $x = 0$. De plus, il est clair que pour toute rotation Ω, on a $G(\Omega\xi) = G(\xi)$. Donc $G(\xi) = \Gamma(|\xi|)$ pour une certaine fonction Γ. De plus, on voit facilement par changement de variable que

$$\Gamma(\lambda t) = |\lambda|^{2s}\Gamma(t).$$

et par conséquent $\Gamma(|\xi|) = |\xi|^{2s}\Gamma_1$ avec $A_s = \Gamma(1)$. En injectant cette information dans (3.3), il vient

$$I = A_s \int |\hat{u}(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi$$

En ajoutant $\|u\|_{L^2}^2 = \|\hat{u}\|_{L^2}^2$ à cette identité, on obtient le résultat annoncé. L'équivalence avec $\|u\|_{H^s}^2$ est laissée au lecteur. □

Théorème 3.8 *Soit $s \geq 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq s$. On suppose que $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un $\mathcal{C}^m$ difféomorphisme tel que*

$$\exists C > 0, \quad \sup_{1 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha \theta| \leq C \ \text{ et } \ \sup_{|\beta|=1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_x^\beta \theta^{-1}| \leq C$$

Alors, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $u \circ \theta \in H^s(\mathbb{R}^d)$

$$\|u \circ \theta\|_{H^s} \leq C' \|u\|_{H^s} \tag{3.4}$$

pour une certaine constante $C' > 0$ indépendante de u.

Preuve. Il suffit de démontrer que l'estimation (3.4) est satisfaite pour tout $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Supposons en effet que c'est le cas et soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ quelconque. Il existe une suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n \to u$ dans H^s. En particulier, (u_n) est de Cauchy dans H^s et grace à (3.4), la suite $v_n = u_n \circ \theta$ est de Cauchy dans H^s. Elle admet donc une limite $v \in H^s$. Par ailleurs, au sens des distributions, on a $v_n = u_n \circ \theta \to u \circ \theta$. On en déduit que $v = u \circ \theta$. Donc $u \circ \theta \in H^s$ et en passant à la limite dans l'inégalité

$$\|u_n \circ \theta\|_{H^s} \leq C' \|u_n\|_{H^s}$$

on obtient (3.4) pour tout $u \in H^s$.

On montre maintenant (3.4) pour tout $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans le cas $0 \leq s < 1$.

Si $s = 0$, le résultat découle directement d'un changement de variable.

On se place donc dans le cas $0 < s < 1$.

D'après le théorème 3.7, on a

$$\|u \circ \theta\|_{H^s(\mathbb{R}^{d'})}^2 = \|u \circ \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^{d'})}^2 + A_s \iint |u(\theta(x)) - u(\theta(y))|^2 |x - y|^{-d'-2s} dxdy \tag{3.5}$$

Il est clair que

$$\|u \circ \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^{d'})}^2 = \|u j_\theta^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d'})}^2$$

où j_θ désigne le jacobien du changement de variable $x \mapsto \theta^{-1}(x)$. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que $\sup_{\mathbb{R}^d} j_\theta(x) \leq C$. Par suite

$$\|u_2 \circ \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^{d'})}^2 \leq C \|u_2\|_{L^2(\mathbb{R}^{d'})}^2 \tag{3.6}$$

Il reste donc à examiner le second terme du membre de droite de (3.5). A nouveau, on effectue le changement de variables $(x,y) = (\theta(x'),\theta(y'))$. Il vient

$$\begin{aligned} I := & \iint |u(\theta(x)) - u(\theta(y))|^2 |x-y|^{-d'-2s} dxdy \\ = & \iint |u(x') - u(y')|^2 |\theta(x') - \theta(y')|^{-d'-2s} j_\theta(x') j_\theta(y') dx'dy' \end{aligned}$$

Or, il existe des constantes $C_1,C_2 > 0$ telles que pour tout $x,y \in \text{supp}(u_2)$ on a

$$j_\theta(x) \leq C_1 \text{ et } |\theta(x) - \theta(y)| \geq C_2 |x-y|$$

où la seconde estimation vient du théorème des accroissements finis pour θ^{-1}. On en déduit que

$$I \leq C \iint |u_2(x') - u_2(y')|^2 |x' - y'|^{-d'-2s} dx'dy'$$

En combinant cette estimation avec (3.5) et (3.6), on obtient

$$\|u \circ \theta\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{d'})} \leq C \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{d'})} \tag{3.7}$$

Cela montre que $u \circ \theta \in H^s$ ainsi que l'estimation souhaitée. □

3.1.3 Espaces de Sobolev sur une hypersurface

Définition 3.9 *Soit Σ un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$. On dit que Σ est une hypersurface régulière si Σ est partout localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{d-1}$, i.e. pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 et un $\mathcal{C}^\infty$- difféomorphisme $\kappa : V \to V'$ tel que $\kappa(V \cap \Sigma) = V' \cap \{x_1 = 0\}$. Le couple (V,κ) s'appelle une carte de l'hypersurface Σ.*

Proposition 3.10 *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une hypersurface régulière et compacte. Alors, il existe une famille finie de cartes $(V_j,\kappa_j)_{j=1,\dots,J}$ telle que les V_j recouvrent Σ. Une telle famille s'appelle un atlas de Σ.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du Théorème de Borel-Lebesgue. □

Définition 3.11 *Soit $s \geq 0$. L'espace de Sobolev $H^s(\Sigma)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Sigma)$ telles que pour toute carte (V,κ) et pour tout $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ la fonction $(\chi u) \circ \kappa^{-1}$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^{d-1})$.*

Proposition 3.12 *La définition précédente ne dépend pas du choix de l'atlas pour Σ.*

On fait la preuve dans le cas $0 \leq s < 1$.

Supposons que (V_1,κ_1) et (V_2,κ_2) sont deux cartes telles que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ et soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(V_1 \cap V_2)$. Pour $j = 1,2$, on note $u_j = (\chi u) \circ \kappa_j^{-1}$. On a donc $u_1 = u_2 \circ \theta$ avec $\theta = \kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$. On doit montrer que

$$u_2 \in H^s(\mathbb{R}^{d-1}) \Longrightarrow u_1 \in H^s(\mathbb{R}^{d-1})$$

Notons $d' = d - 1$.

Comme u est à support compact et que θ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, il exists $C > 0$ tel que

$$\sup_{|\alpha|=1} \sup_{x \in \mathrm{supp}(u)} (|\partial_x^\alpha \theta| + |\partial_x^\alpha \theta^{-1}|) \leq C.$$

On peut donc appliquer le Théorème 3.8. On en déduit que $u_1 \in H^s$ et que

$$\|u_1\|_{H^s} \leq C\|u_2\|_{H^s}. \tag{3.8}$$

□

Définition 3.13 *Soit $s \geq 0$ Soit (V_j,κ_j) un atlas de Σ et (χ_j) une famille de fonctions régulières telles que* $\mathrm{supp}(\chi_j) \subset V_j$ *et* $\sum_{j=1} J\chi_j = 1$ *au voisinage de Σ. Pour tout $u \in H^s(\Sigma)$, on définit*

$$\|u\|^2_{H^s(\sigma)} = \sum_{j=1}^{J} \|(\chi_j u) \circ \kappa_j^{-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{d-1}}$$

Proposition 3.14 *Si l'on se donne deux atlas différents sur Σ, les normes H^s correspondantes sont équivalentes.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de (3.8). □

3.1.4 Théorèmes d'injection

Définissons l'espace des fonctions C^k bornées ainsi que leurs dérivées par

$$\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d), \forall |\alpha| \leq k, \partial_x^\alpha u \in L^\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}_b^k} = \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^\infty}$$

Théorème 3.15 (Injection de Sobolev) *Soit $s > \frac{d}{2} + k$, alors on a l'injection continue*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d)$$

Preuve. On commence par démontrer le résultat pour $k = 0$. Soit $s > \frac{d}{2}$. On a

$$u(x) = \mathcal{F}^*\mathcal{F}u(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

On applique le théorème de continuité de Lebesgue à la fonction $(x,\xi) \mapsto f(x,\xi) = e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)$. Il est clair que f est continue dans la variable x. Par ailleurs, on a $|f(x,\xi)| \leq g(\xi) = |\hat{u}(\xi)|$ et

$$g(\xi) = \langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^s|\hat{u}(\xi)|$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, comme $s > \frac{d}{2}$, $\xi \mapsto \langle\xi\rangle^{-s}$ appartient à L^2 et par définition de H^s, la fonction $\xi \mapsto \langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)$ appartient aussi à L^2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors que $g \in L^2$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité de Lebesgue qui prouve que la fonction u est continue. De plus, on a

$$|u(x)| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\langle\xi\rangle^{-s}\|_{L^2} \|u\|_{H^s}$$

ce qui prouve que u est bornée et que l'injection $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d)$ est continue.

Supposons maintenant que $k \in \mathbb{N}$ est quelconque et que $s > k + \frac{d}{2}$. Soit $u \in H^s$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|} \subset H^{s-k}$ et comme $s-k > \frac{d}{2}$, on déduit du cas $k = 0$ que $\partial^\alpha u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$ ce qui permet de conclure. □

Pour tout $R \geq 0$ et $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace

$$H_R^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^d),\ \mathrm{supp}(u) \subset B(0,R)\}$$

Rappelons quelques éléments sur les opérateurs compacts.

Définition 3.16 *Un opérateur linéaire continu T entre deux espaces de Banach E et F est compact si $T(B_E(0,1))$ est relativement compact dans F.*

Proposition 3.17 *Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu, alors T est compact si et seulement si pour toute suite (u_n) convergeant faiblement vers 0 il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(Tu_{\varphi(n)})$ converge vers 0 dans F.*

Théorème 3.18 (Théorème de compacité de Rellich) *Pour tout $t < s$, l'injection de H_R^s dans H_R^t est compacte.*

Preuve. On donne la preuve dans le cas $t = 0$, $s = 1$. Il s'agit de montrer que pour toute suite (u_n) de H_R^1 convergeant faiblement vers 0 dans H^1, il existe une extraction n_k telle que (u_{n_k}) converge vers 0 dans L^2. On se donne une telle suite (u_n) et on fixe $\epsilon > 0$. Comme (u_n) est faiblement convergente dans H^1, elle est bornée H^1. Il existe donc $C_0 > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\|_{H^1} \leq C_0.$$

Pour tout $M > 0$ on a une décomposition

$$\hat{u}_n = 1\!\!1_{|\xi|<M}\, \hat{u}_n + 1\!\!1_{|\xi|\geq M}\, \hat{u}_n = v_n^L + v_n^H$$

On a

$$\begin{aligned}\|v_n^H\|_{L^2}^2 &= \int 1\!\!1_{|\xi|\geq M}\, |\hat{u}_n|^2 d\xi = \int 1\!\!1_{|\xi|\geq M} \langle\xi\rangle^{-2} |\langle\xi\rangle \hat{u}_n|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{1+M^2} \|u_n\|_{H^1}^2 \leq \frac{C_0^2}{1+M^2}.\end{aligned}$$

On peut donc choisir $M > 0$ assez grand pour que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|v_n^H\|_{L^2}^2 < \epsilon^2.$$

Il reste donc à montrer que M étant fixé comme ci-dessus, on a $v_n^L \to 0$ dans L^2. On remarque que puisque $\mathrm{supp}(u_n) \subset \{|x| \leq R\}$ alors

$$v_n^L(\xi) = 1\!\!1_{|\xi|<M}\, \hat{u}_n = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, 1\!\!1_{|\xi|<M} \int \chi(x) e^{-ix\xi} u_n(x) dx$$

pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur $B(0,R)$. Par suite

$$v_n^L(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mathbb{1}_{|\xi|<M} \langle u_n, \chi(x)e^{-ix\xi}\rangle_{L^2}$$

et comme (u_n) tend faiblement vers 0, on en déduit que pour tout ξ, $v_n^L(\xi) \to 0$. Par ailleurs, on a

$$|v_n^L(\xi)| \leq C\, \mathbb{1}_{|\xi|<M} \|u_n\|_{L^2} \|\chi(x)\|_{L^2} \leq CC_0 R^d\, \mathbb{1}_{|\xi|<M}$$

qui est L^2 et indépendante de n. Le théorème de convergence dominée montre donc que $\|v_n^L\|_{L^2} \to 0$. □

Exercice 3.19 *Démontrer le résultat précédant pour $t < s$ quelconques.*

3.1.5 Opérateurs de trace

On va maintenant montrer comment restreindre les fonctions de H^s à des sous-espaces.

Théorème 3.20 (Théorème de trace) *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit*

$$\begin{aligned} \gamma_{x_0} : \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) &\to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi &\mapsto \varphi(x_0, \cdot) \end{aligned}$$

Pour tout $s > \frac{1}{2}$, l'opérateur γ se prolonge en une application linéaire continue de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$. On notera $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^{d+1}$, $\mathcal{F}_{x_1}$ la transformée de Fourier partielle dans la variable $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}_{x'}$ la transformée de Fourier partielle dans la variable $x' \in \mathbb{R}^d$. Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1})$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_0 u(x') &= \gamma_0(\mathcal{F}^*\mathcal{F}u)(x') = \mathcal{F}^*\mathcal{F}u(0,x') \\ &= (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{ix'\xi'} \mathcal{F}u(\xi_1,\xi')d\xi_1 d\xi' \end{aligned}$$

On va montrer que cette dernière expression est bien définie pour $u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ et appartient à $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. On le fait d'abord pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1})$. On remarque que d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{x'}(\gamma_0 u)(\xi')|^2 &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s}\mathcal{F}u(\xi_1,\xi')d\xi_1\Big|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{-2s}d\xi_1\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s}|\mathcal{F}u(\xi_1,\xi')|^2 d\xi_1\Big) \end{aligned}$$

Or en effectuant le changement de variable $\xi_1 = \langle\xi'\rangle\eta_1$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{-2s}d\xi_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi_1^2+|\xi'|^2)^s}d\xi_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle\xi'\rangle^{1-2s}}{\langle\eta_1\rangle^{2s}}d\eta_1 = C\langle\xi'\rangle^{1-2s}$$

avec $C = \int_{\mathbb{R}} \langle\eta_1\rangle^{-2s}d\eta_1 < \infty$ car $s > \frac{1}{2}$. On en déduit que

$$|\mathcal{F}_{x'}(\gamma_0 u)(\xi')|^2 \leq C\langle\xi'\rangle^{1-2s}\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s}|\mathcal{F}u(\xi_1,\xi')|^2 d\xi_1$$

et par suite

$$\begin{aligned}\|\gamma_0 u\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi' \rangle^{2s-1} |\mathcal{F}_{x'}(\gamma_0 u)(\xi')|^2 d\xi' \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}u(\xi_1,\xi')|^2 d\xi_1 d\xi' \\ &\le C \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}\end{aligned}$$

Ceci montre que pour tout $s > \frac{1}{2}$, l'application $\gamma_0 : (\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1}),\|.\|_{H^s}) \to (H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d),\|.\|_{H^{s-\frac{1}{2}}})$ est continue. Comme $\mathscr{S}$ est dense dans H^s, elle se prolonge de manière unique en une application continue de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. □

Théorème 3.21 *Soit $s > \frac{1}{2}$. L'application $\gamma : H^s(\mathbb{R}^{d+1}) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ est surjective.*

Preuve. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction égale à 1 près de 0. Soit $\theta \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ quelconque. On définit

$$u(x_1,x') = \mathcal{F}^*_{\xi' \to x'}(\hat{\theta}(\xi')\chi(\langle \xi' \rangle x_1))$$

où $\hat{\theta}(\xi') = \mathcal{F}_{x' \to \xi'}\theta(\xi')$. Comme $\chi(0) = 1$, alors

$$u(0,x') = \mathcal{F}^*_{\xi' \to x'}(\hat{\theta}(\xi')) = \theta(x').$$

Montrons maintenant que u appartient bien à $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1} \chi(x_1\langle \xi' \rangle) dx_1 \hat{\theta}(\xi') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1/\langle \xi' \rangle} \chi(x_1) dx_1 \langle \xi' \rangle^{-1} \hat{\theta}(\xi') \\ &= \langle \xi' \rangle^{-1} \hat{\chi}(\frac{\xi_1}{\langle \xi' \rangle}) \hat{\theta}(\xi')\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi' \rangle^{-2} |\hat{\chi}(\frac{\xi_1}{\langle \xi' \rangle})|^2 |\hat{\theta}(\xi')|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi' \rangle^{-2} |\hat{\theta}(\xi')|^2 \big(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{\chi}(\frac{\xi_1}{\langle \xi' \rangle})|^2 d\xi_1 \big) d\xi'\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\xi_1 = \langle \xi' \rangle \eta_1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{\chi}(\frac{\xi_1}{\langle \xi' \rangle})|^2 d\xi_1 = \langle \xi' \rangle^{2s+1} \int_{\mathbb{R}} (1+\eta_1^2)^s |\hat{\chi}(\eta_1)|^2 d\eta_1 = C \langle \xi' \rangle^{2s+1}$$

avec $0 < C < \infty$. Par suite

$$\|u\|^2_{H^s} = C \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi' \rangle^{-2} \langle \xi' \rangle^{2s+1} |\hat{\theta}(\xi')|^2 d\xi' = C \|\theta\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}}$$

ce qui achève la preuve. □

3.2 Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

3.2.1 Généralités

On suppose dans cette section que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.22 *Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ par*

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

où les dérivées ∂^α sont à prendre au sens des distributions.

Dans toute la suite, on notera $\langle .,. \rangle_{L^2}$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$.

Proposition 3.23 *Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit sur H^k*

$$\langle u,v \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2}.$$

Ceci définit un produit scalaire sur $H^k(\Omega)$. On note $\|.\|_{H^k}$ la norme associée. Alors $(H^k, \|.\|_{H^k})$ est un espace de Hilbert.

Remarque 3.24 *Si $\Omega = \mathbb{R}^d$ alors la norme H^k ci-dessus est équivalente à celle définie par la transformée de Fourier.*

Définition 3.25 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans H^1.*

3.2.2 Opérateurs de trace et de prolongement

Théorème 3.26 *Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe un opérateur linéaire continu $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $Pu(x) = u(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$.*

Preuve. On donne la démonstration dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^d = \{(x_1,x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, x_1 > 0\}$. On se donne une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 prés de 0 et supportée dans $[-1,1]$. On définit la symétrie $\sigma : \{x_1 < 0\} \to \{x_1 > 0\}$ par $\sigma(x_1,x') = (-x_1,x')$. Pour $u \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$, on définit u^* par

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x_1 > 0 \\ (\chi u)(\sigma x) \text{ si } x_1 < 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Comme $u \in H^1(\mathbb{R}_+^d) \subset L^2(\mathbb{R}_+^d)$ alors u^* est bien définie comme élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$. On va montrer que $u^* \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, on montre que pour tout $i = 1, \dots, d$, $\partial_{x_i} u \in L^2(\Omega)$. On commence par montrer que pour tout $i = 2, \dots, d$, on a

$$\partial_{x_i} u^*(x) = \begin{cases} \partial_{x_i} u(x) \text{ si } x_1 > 0 \\ (\chi \partial_{x_i} u)(\sigma x) \text{ si } x_1 < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

On aura besoin d'une fonction de troncature $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ croissante telle que $\eta(t) = 0$ si $t < 1$ et $\eta(t) = 1$ si $t > 2$. On se donne une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $i = 2, \dots, d$, on a

$$\begin{aligned}
\langle u^*, \partial_i \varphi \rangle_{L^2} &= \int_{x_1 > 0} u(x) \partial_i \varphi(x) dx + \int_{x_1 > 0} (\chi u)(x) \partial_i \varphi(\sigma x) dx \\
&= \int_{x_1 > 0} u(x) (\partial_i \varphi(x) + \chi(x) \partial_i (\varphi \circ \sigma)(x)) dx \\
&= \int_{x_1 > 0} u(x) \partial_i (\varphi + \chi(x) \varphi \circ \sigma)(x) dx
\end{aligned}$$

car χ ne dépend que de x_1. On note $\psi(x) = \varphi(x) + \chi(x)\varphi \circ \sigma(x)$. Par une application directe du théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\langle u^*, \partial_i \varphi \rangle_{L^2} = \lim_{k \to \infty} \int_{x_1 > 0} \eta_k(x_1) u(x) \partial_i \psi(x) dx.$$

avec $\eta_k(x_1) = \eta(kx_1)$. Comme la fonction η ne dépend pas des variables $x_i, i \geq 2$, on a l'identité $\eta_k \partial_i \psi = \partial_i(\eta_k \psi)$. Par ailleurs, par définition de η, la fonction $\psi_k = \eta_k \psi$ appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ (ce qui n'est pas le cas de ψ et explique l'introduction de η). On peut donc intégrer par parties avec $u \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$. On en déduit que pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\langle u^*, \partial_i \varphi \rangle_{L^2} &= -\lim_{k \to \infty} \int_{x_1 > 0} \eta_k(x_1) \partial_i u(x) \psi(x) dx \\
&= -\int_{x_1 > 0} \partial_i u(x)(\varphi(x) + \chi(x)\varphi \circ \sigma(x)) dx \\
&= -\int_{x_1 > 0} \partial_i u(x) \varphi(x) dx - \int_{x_1 < 0} (\chi \partial_i u)(\sigma x) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.10).

On calcule maintenant $\partial_1 u$. On va montrer que

$$\partial_{x_1} u^*(x) = \begin{cases} \partial_{x_1} u(x) \text{ si } x_1 > 0 \\ -(\chi \partial_{x_1} u)(\sigma x) - (\chi' u)(\sigma x) \text{ si } x_1 < 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

En travaillant comme précédemment, et en remarquant que pour toute fonction régulière on a $\partial_1(f \circ \sigma) = -(\partial_1 f) \circ \sigma$, on montre facilement que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle u^*, \partial_1 \varphi \rangle_{L^2} = \int_{x_1 > 0} u(x)(\partial_1 \theta - \partial_1 \chi \varphi \circ \sigma)(x) dx$$

avec $\theta = \varphi - \chi(\varphi \circ \sigma)$. En introduisant la suite (η_k) comme précédemment, on a

$$\int_{x_1 > 0} u(x) \partial_1 \theta(x) dx = \lim_{k \to \infty} \int_{x_1 > 0} \eta_k(x_1) u(x) \partial_1 \theta(x) dx$$

Or, on a $\eta_k \partial_1 \theta = \partial_1(\eta_k \theta) - \eta_k' \theta$. Par suite

$$\begin{aligned}
\int_{x_1 > 0} \eta_k(x_1) u(x) \partial_1 \theta(x) dx &= -\int_{x_1 > 0} \partial_1 u(x) \eta_k(x_1) \theta(x) dx - \int_{x_1 > 0} u(x) \eta_k'(x) \theta(x) dx \\
&= A_k + B_k
\end{aligned}$$

On montre comme précédemment que

$$\lim_{k \to \infty} A_k = -\int_{x_1 > 0} \partial_1 u(x) \varphi(x) dx + \int_{x_1 < 0} (\chi \partial_1 u)(\sigma x) \varphi(x) dx.$$

Il reste donc à montrer que $\lim_{k \to \infty} B_k = 0$. On commence par remarquer que

$$B_k = \int_{0 < x_1 < \frac{2}{k}} u(x) \theta(x) k \eta'(kx_1) dx.$$

Par ailleurs, comme $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty$ s'annule sur $x_1 = 0$, la formule de Taylor avec reste integral montre qu'il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \phi \subset \{|x'| \leq R\}$ pour un certain $R > 0$ et $\theta(x) = x_1 \phi(x)$. On en déduit

$$\sup_{0<x_1<\frac{2}{k}} |u(x)\theta(x)k\eta'(kx_1)| \leq 2 \sup_{\mathbb{R}} |\eta'| \sup_{\mathbb{R}^d} |\phi| = M < \infty$$

Par suite

$$B_k \leq M \int_{0<x_1<\frac{2}{k}} |u(x)|dx \leq M\sqrt{2k^{-1}}\|u\|_{L^2} \to 0$$

quand $k \to \infty$. Ceci achève la preuve dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^d$.

Pour traiter le cas général, il faut faire une partition de l'unité autour du bord et redresser le bord localement en un demi-espace. On se ramène ainsi au cas de $\mathbb{R}_+^d$. On renvoie aux livres [?], [?] pour les détails. □

Remarque 3.27 *Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^{d+1}$, l'opérateur P construit précédemment commute avec ∂_{x_j} pour tout $j \geq 2$.*

Définition 3.28 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.*

- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $R_\Omega : H^k(\mathbb{R}^d) \to H^k(\Omega)$ l'opérateur de restriction à Ω: $R_\Omega u = u_{|\partial\Omega}$.*
- *On note $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ l'espace vectoriel des fonctions u de la forme $u = R_\Omega \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 3.29 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_\Omega : H^k(\mathbb{R}^d) \to H^k(\Omega)$ est continu et $\|R_\Omega\|_{H^k(\mathbb{R}^d)\to H^k(\Omega)} \leq 1$.*

Preuve. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

□

Proposition 3.30 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Preuve. Soit $u \in H^1(\Omega)$ et soit $\epsilon > 0$. On se donne $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ un opérateur de prolongement. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|Pu - \varphi\|_{H^1} < \epsilon$. On pose $\psi = R_\Omega \varphi$. Par définition $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et en outre

$$\|u - \psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|Pu - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \epsilon$$

ce qui prouve le résultat. □

Théorème 3.31 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^m$ de $\mathbb{R}^d$. Il existe un opérateur continu $\gamma_0 : H^m(\Omega) \to H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\gamma_0 u = u_{|\partial\Omega}$.*

Preuve. On traite le cas $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Soit

$$\gamma_0 : H^m(\mathbb{R}^{d+1}) \to H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$$

l'opérateur de trace définit par le théorème 3.20 et soit

$$P : H^m(\mathbb{R}^{d+1}_+) \to H^m(\mathbb{R}^{d+1})$$

un opérateur de prolongement défini par le théorème 3.26. Alors $\gamma = \gamma_0 \circ P$ a les propriétés requises. □

Théorème 3.32 *Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$ et soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u \in H^1_0(\Omega)$ si et seulement si $\gamma_0(u) = 0$.*

3.2.3 Inégalités fonctionnelles

Théorème 3.33 (Théorème de Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. Soit (u_n) une suite bornée de $H^1(\Omega)$ et soit $v_n = Pu_n$ où P est un opérateur de prolongement. Quitte à multiplier par une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur Ω, on peut supposer qu'il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(v_n) \subset B(0,R)$. Par suite, (v_n) est bornée dans $H^1_R(\mathbb{R}^d)$. On peut donc appliquer le théorème de Rellich sur $\mathbb{R}^d$. Il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $v_{\varphi(n)} \to v$ dans L^2 quand $n \to \infty$. Par suite

$$\|u_{\varphi(n)} - R_\Omega v\|_{L^2(\Omega)} \le \|v_{\varphi(n)} - v\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

quand $n \to \infty$. □

Théorème 3.34 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall f \in H^1_0(\Omega),\ \int_\Omega |f|^2 \le C \int_\Omega |\nabla f|^2$$

Preuve. Les deux termes de l'inégalité étant continus pour la norme H^1, il suffit de démontrer cette inégalité sur $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ qui est dense dans $H^1_0(\Omega)$. Puisque Ω est borné, quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que $\Omega \subset \{|x_1| \le R\}$ pour un certain $R > 0$. Comme $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ alors

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \partial_{x_1} u(t,x')dt$$

où $x = (x_1,x')$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|u(x)|^2 \le (x_1 + R) \int_{-R}^{R} |\partial_{x_1} u(t,x')|^2 dt$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^2 dx &\le \int_{x' \in \mathbb{R}^d} \int_{x_1 \in [-R,R]} (x_1 + R) \int_{-R}^{R} |\partial_{x_1} u(t,x')|^2 dt dx_1 dx' \\
&\le \Big(\int_{x_1 \in [-R,R]} (x_1 + R) dx_1 \Big) \Big(\int_{x' \in \mathbb{R}^d} \int_{-R}^{R} |\partial_{x_1} u(t,x')|^2 dt dx' \Big) \\
&\le 2R^2 \int_\Omega |\partial_{x_1} u(x)|^2 dx \le 2R^2 \|\nabla u\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat avec $C = \sqrt{2}R$. $\square$

3.2.4 Application au problème de Dirichlet

Définition 3.35 *On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.*

Théorème 3.36 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de*

$$-\Delta u + \lambda u = f \ \textit{dans}\ \mathscr{D}'(\Omega).$$

De plus, si Ω est borné le résultat est encore valable avec $\lambda = 0$.

Preuve. On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\langle -\Delta u + \lambda u, \varphi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}$$

Compte tenu de l'injection dense $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, ceci équivaut à

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} + \lambda \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Supposons d'abord que $\lambda > 0$. On vérifie aisément que

$$\langle u, v \rangle_\lambda := \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2}$$

définit un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ et que la norme est équivalente à la norme usuelle. Par suite, $(H_0^1(\Omega), \langle ., . \rangle_\lambda)$ est un espace de Hilbert et l'application $v \mapsto \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ est continue pour la norme induite par $\langle ., . \rangle_\lambda$. On peut donc appliquer le théorème de Riesz qui prouve qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Ceci prouve le Théorème lorsque $\lambda > 0$. Si Ω est borné, on peut à nouveau utiliser le théorème de Riesz avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, c'est bien un produit scalaire et la norme qu'il définit est équivalente à $\|.\|_{H^1}$. Cela suffit pour conclure. $\square$

Chapitre 4

Résolution de problèmes d'évolution par transformation de Fourier

4.1 Problématique générale

On se donne un opérateur différentiel *à coefficients constants* sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$P(\partial_t,\partial_x) = \sum_{k=0}^{m} A_k(\partial_x)\partial_t^k \tag{4.1}$$

où

$$A_k(\partial_x) = \sum_{finie} a_{k,\alpha}\partial_k^\alpha$$

avec $a_{k,\alpha} = cte \in \mathbb{C}$. On se donne des fonctions $f,u_0,\ldots,u_{m-1}$ et on cherche une fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\partial_t,\partial_x)u = f \\ u(0,x) = u_0(x),\ldots,\partial_t^{m-1}u(0,x) = u_{m-1}(x) \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Ce problème, s'appelle problème de Cauchy pour l'équation $P(\partial_t,\partial_x)u = f$. La stratégie générale consiste à faire une transformation de Fourier partielle dans la variable x pour se ramener à l'étude d'une famille d'EDO. Notons $\mathcal{F}_{x\to\xi}f(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle dans la variable x. Pour des fonctions $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, cela signifie

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}f(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(t,x)dx$$

Alors, pout tout $k = 0,\ldots,m$, on a

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(A_k(\partial_x)\partial_t^k f)(t\xi) = \partial_t^k \mathcal{F}_{x\to\xi}(A_k(\partial_x)f)(t\xi) = \partial_t^k A_k(i\xi)\mathcal{F}_{x\to\xi}(f)(t,\xi).$$

En notant $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(f)(t,\xi)$, le problème (4.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\partial_t,i\xi)u = \hat{f} \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi),\ldots,\partial_t^{m-1}\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_{m-1}(\xi) \end{array} \right. \tag{4.3}$$

On est donc ramené à une famille d'EDO (dépendant du paramètre ξ). Supposons qu'on sait résoudre (4.3) pour tout ξ et que la fonction $(t,\xi) \mapsto \hat{v}(t,\xi)$ solution est dans un bon espace. Alors $u(t,x) = \mathcal{F}^* v(t,x)$ sera solution de (4.2).

On va maintenant écrire les choses de manière plus rigoureuse.

4.2 Fonctions du temps à valeurs dans des espaces de Sobolev

Dans cette section, on note pour tout $s \in \mathbb{R}$, $X_s = H^s(\mathbb{R}^d)$ que l'on munit de sa norme usuelle. On note $\Omega =]0,T[\cap\mathbb{R}^d$ et pour tout $u \in \mathcal{C}^k([0,T],X_s)$, $T > 0$ on définit $T_u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ par

$$\langle T_u,\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \int_0^T \langle u(t,.),\varphi(t,.)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} dt \tag{4.4}$$

Proposition 4.1 *Pour tout $u \in \mathcal{C}^k([0,T],H^s(\mathbb{R}^d))$, on a $T_u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. De plus l'application linéaire $u \mapsto T_u$ est injective.*

Preuve. Vérifions que la formule ci-dessous définit bien un élément de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et soit K uyn compact de $]0,T[\times\mathbb{R}^d$ tel que $\sup(\varphi) \subset K$. Pour tout $t \in]0,T[$, on a $\varphi(t,.) \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in]0,T[,\ \|\varphi(t,.)\|_{H^{-s}} \leq C p_{|s|,K}(\varphi)$$

où $p_{k,K}$ désigne la seminorme $p_{k,K}(\varphi) = \sup_{x\in K}\{|\partial_x^\alpha \varphi(t,x)|,\ (t,x) \in \Omega,\ |\alpha| \leq k\}$. De plus, il existe un compact $K' \subset \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus K'$, $\varphi(t,.) = 0$. Par suite, pour tout $t \in]0,T[$, on a

$$|\langle u(t,.),\varphi(t,.)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}| = |\langle u(t,.),\varphi(t,.)\rangle_{H^s,H^{-s}}| \leq \sup_{t\in K'} \|u(t,.)\|_{H^s} \|\varphi(t,.)\|_{H^{-s}}$$

Comme, $t \mapsto u(t,.)$ est continue à support compact, il existe $C > 0$ tel que

$$|\int_0^T \langle u(t,.),\varphi(t,.)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} dt| \leq C|K|p_{|s|}(\varphi)$$

où $|K'|$ désigne la longueur de K'. Ceci montre que (4.4) définit bien une distribution.

Montrons $u \mapsto T_u$ est injective. Supposons que $T_u = 0$ et prenons $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ de la forme $\varphi(t,x) = \theta(t)\psi(x)$. Alors

$$0 = \int_0^T \theta(t)\langle u(t,.)\psi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} dt$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction $\theta \in \mathscr{D}(]0,T[)$, on en déduit que pour tout $t \in]0,T[$, on a $\langle u(t,.)\psi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = 0$ et par suite $u(t,.) = 0$. $\square$

Proposition 4.2 *Supposons que $u \in C^1([0,T],H^s)$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial_x^\alpha T_u = T_{\partial_x^\alpha u}$ et $\partial_t T_u = T_{\partial_t u}$.*

Preuve. Commençons par calculer $\partial_x^\alpha T_u$. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \partial_x^\alpha T_u,\varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T_u,\partial_x^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_0^T \langle u(t,.),\partial_x^\alpha \varphi(t,.)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} dt\\ &= \int_0^T \langle \partial_x^\alpha u(t,.),\varphi(t,.)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} dt = \langle T_{\partial_x^\alpha u},\varphi\rangle\end{aligned}$$

ce qui prouve la première identité.

Calculons maintenant $\partial_t T_u$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. La fonction $t \mapsto w(t) := \langle u(t,.),\varphi(t,.\rangle_{H^s,H^{-s}}$ est dérivable et

$$\frac{dw}{dt} = \langle \partial_t u(t,.),\varphi(t,.\rangle_{H^s,H^{-s}} + \langle u(t,.),\partial_t\varphi(t,.\rangle_{H^s,H^{-s}}$$

De plus, comme w est à support compact, alors

$$0 = \int_0^T \frac{dw}{dt} dt = \int_0^T \langle \partial_t u(t,.),\varphi(t,.\rangle_{H^s,H^{-s}} dt + \int_0^T \langle u(t,.),\partial_t\varphi(t,.\rangle_{H^s,H^{-s}} dt$$

On en déduit immédiatement

$$\langle T_{\partial_t u},\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = -\langle T_u,\partial_t\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$$

ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 4.3 *Soit $P(x,\partial_x)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre $m \in \mathbb{N}$ et supposons que $u \in \mathcal{C}^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}([0,T],H^m(\mathbb{R}^d))$ vérifie*

$$\partial_t u = P(x,\partial_x)u.$$

Alors, T_u est solution de $\partial_t T + P(x,\partial_x)T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$.

Remarque 4.4 *Posons $Y_s = L^2(\mathbb{R}^d,\langle\xi\rangle^{2s}d\xi) = \mathcal{F}(H^s(\mathbb{R}^d))$. En travaillant comme ci-dessus, on montre que l'on peut définir T_u pour $u \in \mathcal{C}([0,T],Y_s)$ avec des propriétés identiques aux précédentes.*

Définition 4.5 *Soit $u \in \mathcal{C}([0,T[,H^s)$, on définit la transformée de Fourier partielle dans la variable x*

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} f(t,\xi) = \mathcal{F}(u(t,.))(\xi)$$

où pour tout t, la transformée de Fourier de $u(t,.)$ est bien définie car $u(t,.) \in H^s \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.6 *L'application $\mathcal{F}_{x\to\xi}$ est une isométrie de $\mathcal{C}([0,T],X_s)$ sur $\mathcal{C}([0,T],Y_s)$. De plus, si $u \in \mathcal{C}^k([0,T],X_s)$ pour un certain $k \geq 1$, alors $\mathcal{F}_{x\to\xi} f \in \mathcal{C}^k([0,T],Y_s)$ et*

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial_t^k f) = \partial_t^k \mathcal{F}_{x\to\xi} f$$

Proposition 4.7 *Soit $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $a < b$ deux réels. On suppose que*

- *il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d\backslash N$, la fonction $t \mapsto u(t,x)$ est $\mathcal{C}^k$*

– *il existe* $g \in Y_s$ *tel que pour tout* $0 \le j \le k$*,*

$$\sup_{t\in[a,b]} |\partial_t^j u(t,.)| \le g.$$

Alors $u \in \mathcal{C}^k([a,b],Y_s)$*.*

Preuve. On procède par récurrence sur k. Supposons que $k = 0$. On veut montrer que $t \mapsto u(t,.)$ est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On se donne $t_0 \in [a,b]$. Pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{Y_s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x) - u(t_0,x)|^2 \langle x\rangle^{2s} dx.$$

D'après les hypothèse, la fonction $h(t,x) := |u(t,x) - u(t_0,x)|^2 \langle x\rangle^{2s}$ vérifie

- $\lim_{t\to t_0} h(t,x) = 0$
- $\forall t \in [a,b]$, $|h(t,x)| \le g(x)^2 \langle x\rangle^{2s} \in L^1$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. On en déduit que $\|u(t) - u(t_0)\|_{Y_s}^2$ tend vers 0 quand $t \to t_0$.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang k. Soit $h > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$, on a

$$\partial_t^k u(t+h,x) - \partial_t^k u(t,x) = h \int_0^1 \partial_t^{k+1} u(t+h\tau,x) d\tau.$$

On note $w_h(t,x) = \frac{1}{h}(\partial_t^k u(t+h,x) - \partial_t^k u(t,x)) - \partial_t^{k+1} u(t,x)$. Pour $t \in]a,b[$ fixé, on a

$$\begin{aligned} \|w_h(t)\|_{Y_s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} | \int_0^1 \partial_t^{k+1} u(t+h\tau,x) - \partial_t^{k+1} u(t,x) d\tau|^2 \langle x\rangle^{2s} dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\partial_t^{k+1} u(t+h\tau,x) - \partial_t^{k+1} u(t,x)|^2 \langle x\rangle^{2s} d\tau dx \end{aligned}$$

Soit $r_h(t,x) = \partial_t^{k+1} u(t+h\tau,x) - \partial_t^{k+1} u(t,x)$ alors $\lim_{h\to 0} r_h(t,x) = 0$ pour presque tout x. De plus pour h assez petit $t + h\tau \in [a,b]$ et par suite

$$|r_h(t,x)| \le 2 \sup_{[a,b]} |\partial_t u(\tau,.)| \le 2g \in Y_s$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée comme précédemment. On en déduit que

$$\|w_h(t)\|_{Y_s}^2 \to 0$$

quand $h \to 0$. Cela montre que u est $k+1$ fois dérivable par rapport à t.

Montrons maintenant que l'application $t \mapsto \partial_t^{k+1} u$ est continue de $\mathbb{R}$ dans Y_s. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient $a < t_0 < b$. Pour tout $t \in [a,b]$, notons

$$r(t,x) = \partial_t^{k+1} u(t,x) - \partial_t^{k+1} u(t_0,x).$$

Alors

$$\|r(t,.)\|_{Y_s}^2 = \int |r(t,x)|^2 \langle x\rangle^{2s} dx$$

Par hypothèse, on a

– $r(t,x) \to 0$ quand $t \to t_0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^s$

– pour tout $t \in [a,b]$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|r(t,x)| \leq 2 \sup_{s\in[a,b]} |\partial_t^{k+1} u(s,x)| \leq 2g \in Y_s$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui montre immédiatement que $\|r(t,.)\|^2_{Y_s} \to 0$ quand $t \to t_0$. □

4.3 L'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial^2_{x_j}$ est l'opérateur de Laplace. Dans cette équation, $u(t,x)$ désigne la température au temps t au point x. La fonction u_0 est la distribution de température initiale et f désigne l'apport de chaleur au cours de l'évolution.

4.3.1 Problème homogène

Dans cette section on suppose que $f = 0$. On considère donc le problème de Cauchy homogène

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0, \ \forall t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 4.8 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Le problème de Cauchy* (4.6) *admet une unique solution $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[,H^s) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[,H^{s-2})$.*

Preuve. Supposons que $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[,H^s) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[,H^{s-2})$ est solution de (4.6) et notons $\hat{u}(t,\xi)\mathcal{F}_{x\to\xi}u(t,\xi)$. Alors, $\hat{u}$ est solution de

$$\begin{cases} (\partial_t + |\xi|^2)\hat{u}(t,\xi) = 0, \ \forall t > 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases} \tag{4.7}$$

On intègre facilement cette EDO, il vient

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-t|\xi|^2} \tag{4.8}$$

En particulier, si $u_0 = 0$, alors $\hat{u} = 0$ et par conséquent $u = 0$ ce qui prouve l'unicité de la solution. De plus, (4.8) suggère de poser

$$u(t,x) = \mathcal{F}^*_{\xi\to x}(e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)d\xi \tag{4.9}$$

Rappelons que $\mathcal{F}$ réalise une isométrie entre H^s et $Y_s = L^2(\mathbb{R}^d,\langle\xi\rangle^{2s}d\xi)$. Par suite, la fonction u définie par (4.9) appartient à $\mathcal{C}([0,+\infty[,H^s) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[,H^{s-2})$ si et seulement si la fonction

$$v : (t,\xi) \mapsto e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

appartient à $\mathcal{C}([0,+\infty[,Y_s) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[,Y_{s-2})$.

Commençons par la continuité. Soit $t_0 \geq 0$. On applique la Proposition 4.7 à la fonction v avec $k = 0$, $a = 0$ et $b > 0$ quelconque. Comme $\hat{u}_0 \in Y_{2s}$ alors $\hat{u}_0$ est finie presque partout. Par suite, la fonction $t \mapsto v(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$ est continue pour presque toute valeur de ξ. Par ailleurs, on a

$$\sup_{t\geq 0} |v(t,\xi)| \leq |\hat{u}_0(\xi)| \in Y_s.$$

Les hypothèses de la Proposition 4.7 sont donc satisfaites avec $g(\xi) = |\hat{u}_0(\xi)|$. On en déduit que $u \in \mathcal{C}([0,b],Y_s)$ pour tout $b > 0$. Par suite $u \in \mathcal{C}([0,\infty[,Y_s)$.

Montrons maintenant que $v \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,Y_{s-2})$. On va appliquer à nouveau la Proposition 4.7 avec $k = 1$, $a = 0$ et $b > 0$ quelconque. Pour tout presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a $|\hat{u}_0(\xi)| < \infty$. Par suite, pour presque tout ξ, la fonction $t \mapsto v(t,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\partial_t v = -|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

De plus, en posant $g(\xi) = |\xi|^2|\hat{u}_0|$, on a $g \in Y_{s-2}$ et

$$\sup_{t\in[a,b]} |\partial_t v| \leq |\xi|^2|\hat{u}_0| = g.$$

On peut donc appliquer à nouveau la Proposition 4.7 et on en déduit qu'on a bien $v \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,Y_{s-2})$.

Il reste à montrer que u est solution de (4.6). On a

$$\partial_t u = \partial_t \mathcal{F}^*_{\xi\to x} v = \mathcal{F}^*_{\xi\to x}(\partial_t v) = \mathcal{F}^*_{\xi\to x}(|\xi|^2 v) = \Delta u$$

et $u(0,x) = \mathcal{F}^*_{\xi\to x}\hat{u}_0 = u_0(x)$. Ceci achève la démonstration. □

Notation 4.9 *Pour tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on note $e^{t\Delta}u_0$ la solution u du problème homogène*

Théorème 4.10 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$. L'unique solution $u = e^{t\Delta}u_0$ de l'équation de la chaleur (4.6) possède les propriétés suivantes:*

1. *pour tout $a > 0$, $u \in \mathcal{C}^\infty_b(]a,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$*
2. *pour tout $a > 0$, $u \in \cap_k \mathcal{C}^\infty_b(]a,+\infty[,H^k(\mathbb{R}^d))$*
3. *dans les espaces précédents, u dépend continûment de u_0.*
4. *pour tout $\alpha \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^d$, $\|\partial^\alpha u\|_{L^2\cap L^\infty} \to 0$ quand $t \to +\infty$.*

Preuve.

□

Proposition 4.11 *Supposons que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$e^{t\Delta}u_0(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x-y|^2/(4t)} u_0(y)dy.$$

De plus, on a les estimations suivantes:

1. *pour tout $t > 0$*
$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx.$$
2. $\|u(t,.)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}$
3. $\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\|u_0\|_{L^1}$

Preuve. Tout est quasiment immédiat en utilisant le théorème de Fubini. □

4.3.2 Problème inhomogène

On traite dans cette section le cas où le second membre f de (4.5) n'est pas nécessairement nul.

Théorème 4.12 *Soit $s \in \mathbb{R}$ et soient $u_0 \in H^s$ et $f \in \mathcal{C}([0,T[,H^s)$. Alors la fonction*

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s,.)ds$$

appartient à $\mathcal{C}([0,+\infty[,H^s) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[,H^{s-2})$. De plus, u est l'unique solution de (4.5) *dans cet espace.*

Preuve. Il est clair que le terme $t \mapsto e^{t\Delta}u_0$ a les propriétés requises. On peut donc supposer que $u_0 = 0$. Considérons la fonction

$$v(\tau,t,.) = \int_0^\tau e^{(t-s)\Delta} f(s,.)ds.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction v est $\mathcal{C}^1$ dans la variable τ et

$$\partial_\tau v(\tau,t,.) = e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau,.)$$

Par ailleurs une preuve classique de dérivation sous le signe intégral montre que v est aussi $\mathcal{C}^1$ par rapport à t et que

$$\partial_t v(\tau,t,.) = \int_0^\tau \partial_t(e^{(t-s)\Delta} f(s,.))ds = \int_0^\tau \Delta e^{(t-s)\Delta} f(s,.)ds = \Delta v(\tau,t,.)$$

En combinant ces deux formules, il vient

$$\partial_t u(t) = \partial_t(v(t,t)) = e^{(t-t)\Delta} f(\tau,.) + \Delta v(t,t,.) = f + \Delta u(t)$$

ce qui prouve le résultat. □

4.4 L'équation des ondes

On considère l'équation modélisant la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu homogène

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0 \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{4.10}$$

où $c > 0$ est la vitesse de propagation du milieu.

4.4.1 Résolution en dimension 1 d'espace

Dans cette partie, on suppose que $d = 1$.

Théorème 4.13 *Soient $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors le problème* (5.13) *possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. De plus, u est donnée par la formule*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)dy.$$

Preuve. Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est solution de (5.13). Considérons la fonction $v(t,x) = u(x-t, c(x+t))$. Alors

$$\partial_t v = (c\partial_x u - \partial_t u)(x-t, c(x+t))$$

donc

$$\partial_x \partial_t v = (c^2 \partial_x^2 u - \partial_t^2 u)(x-t, c(x+t)) = 0$$

On en déduit que qu'il existe des fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$v(t,x) = \tilde{\varphi}(t) + \tilde{\psi}(x)$$

Comme $u(t,x) = v(\frac{x-ct}{2c}, \frac{x+ct}{2c})$, on en déduit que

$$u(t,x) = \tilde{\varphi}(\frac{x-ct}{2c}) + \tilde{\psi}(\frac{x+ct}{2c}) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

avec $\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s/2c)$ et $\psi(s) = \tilde{\psi}(s/2c)$. On déduit ensuite des conditions initiales que

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0(x) = \varphi(x) + \psi(x) \\ u_1(x) = c(\psi'(x) - \varphi'(x)). \end{array} \right. \tag{4.11}$$

On déduit

$$\left\{ \begin{array}{c} \psi' = \frac{1}{2c}u_1 + \frac{1}{2}u_0' \\ \varphi' = \frac{1}{2}u_0' - \frac{1}{2c}u_1 \end{array} \right.$$

On intègre ces équations à vue. On en déduit qu'il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{c} \psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(y)dy + \alpha \\ \varphi(x) = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(y)dy + \beta \end{array} \right.$$

De plus, en injectant ces formules dans (4.11), on obtient $\alpha + \beta = 0$. En revenant à $u(t,x)$, on obtient

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)dy.$$

Ceci prouve la formule annoncé ainsi que l'unicité de la solution. Le fait que la fonction u définie ci-dessus est solution de l'équation des ondes est un simple calcul. □

4.4.2 Le problème de Cauchy

Théorème 4.14 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s$, $u_1 \in H^{s-1}$. Il existe un unique $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^{s-1}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, H^{s-2})$ solution de* (5.13).

Preuve. Quitte à effectuer le changement de variable $x \mapsto \frac{x}{c\sqrt{d}}$, on peut supposer que $c = 1$. Supposons que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^{s-1}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, H^{s-2})$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{array} \right. \tag{4.12}$$

et effectuons une transformation de Fourier partielle dans la variable x. Alors $\hat{u} = \mathcal{F}_{x\to\xi}(u)$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{l}(\partial_t^2 + |\xi|^2)\hat{u} = 0 \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\\ \quad \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\\ \quad \partial_t\hat{u}(0,\xi) = u_1(\xi)\end{array}\right. \tag{4.13}$$

Cette EDO se résout formellement. On trouve

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi). \tag{4.14}$$

On rappelle qu'on note $Y_s = L^2(\mathbb{R}^d_\xi, \langle\xi\rangle^{2s}d\xi)$. On a l'équivalence

$$u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, H^\sigma) \Longleftrightarrow \hat{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, Y_\sigma).$$

Pour montrer cette dernière propriété, on va appliquer la Proposition 4.7 sur des intervalles de la forme $[-T,T]$ avec $T > 0$. Il est clair que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ la fonction $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ est C^∞ sur $[-T,T]$. Par ailleurs, on a pour tout $t \in [-T,T]$

$$\begin{aligned}|\hat{u}(t,\xi)| &\le |\hat{u}_0(\xi)| + \frac{|\sin(t|\xi|)|}{|\xi|}|\hat{u}_1(\xi)|\\ &\le |\hat{u}_0(\xi)| + |T|\,\mathbb{1}_{|\xi|\le 1}\,|\hat{u}_1(\xi)| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbb{1}_{|\xi|\ge 1}\,|\hat{u}_1(\xi)|\langle\xi\rangle^{-1} =: h(\xi)\end{aligned}$$

Comme $u_0 \in H^s$ et $u_1 \in H^{s-1}$ alors $h \in Y_s$ et par suite $u \in C([-T,T], Y_s)$.

Montrons maintenant que $\hat{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, Y^{s-1})$.On a

$$\partial_t\hat{u}(t,\xi) = -|\xi|\sin(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \cos(t|\xi|)\hat{u}_1(\xi).$$

Par suite

$$|\partial_t\hat{u}(t,\xi)| \le \langle\xi\rangle|\hat{u}_0(\xi)| + |\hat{u}_1(\xi)| =: g(\xi)$$

Comme $u_0 \in H^s$ et $u_1 \in H^{s-1}$ alors $\in Y_{s-1}$ et par suite $\hat{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, Y^{s-1})$. Le fait que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, H^{s-2})$ se montre de manière identique.

On pose donc $u(t,x) = \mathcal{F}^*_{\xi\to x}\hat{u}$. Alors, u est solution de (4.13).

Il reste à démontrer l'unicité. Il s'agit de prouver que si $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$, l'unique solution de (4.13) est $u = 0$. Or, pour $\hat{u}_0 = \hat{u}_1 = 0$ qui sont des fonctions régulières, l'unique solution de cette EDO est $u = 0$. □

4.4.3 Propagation des ondes

On commence par définir l'énergie locale d'une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^1) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2)$.

Définition 4.15 *Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^1) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On définit l'énergie de u sur Ω par*

$$E(u(t,.);\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\partial_t u|^2 + c^2\sum_{j=1}^d |\partial_{x_j}u|^2\big)dx$$

On notera $E(u(t)) = E(u(t,.);\mathbb{R}^d)$ l'énergie totale de u.

Théorème 4.16 *Supposons que u est solution de l'équation des ondes. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(u(t)) = E(u(0))$.*

Preuve. On dérive l'énergie

$$\begin{aligned}
\partial_t(E(u(t))) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t\big(|\partial_t u|^2 + c^2\sum_{j=1}^d |\partial_{x_j} u|^2\big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \partial_t^2 u dx + c^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j}\partial_t u \partial_{x_j} u dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \partial_t^2 u dx - c^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \partial_{x_j}^2 u dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u(\partial_t^2 u - c^2\Delta u)dx = 0
\end{aligned}$$

Par suite $E(u(t))$ est constante. □

Dans la suite, on note $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| < R\}$ pour tout $R > 0$.

Théorème 4.17 *Soient $u_0 \in H^2$ et $u_1 \in H^1$, alors pour tout $R > 0$ et pour tout $|T| < R$, on a*

$$E(u(0,.); B_{R-|T|}) \leq E(u(T,.); B_R) \leq E(u(0,.); B_{R+|T|}). \tag{4.15}$$

Preuve. La démonstration repose sur la formule de Green que l'on rappelle maintenant

Lemme 4.18 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et soit $\vec{n}(x)$ la normale extérieure au bord $\partial\Omega$. Alors pour tout champ de vecteur $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on a*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) dx$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface sur $\partial\Omega$.

Revenons à la démonstration du théorème. Pour alléger les notations, on suppose que $c = 1$. Comme u est solution de l'équation des ondes homogènes alors

$$0 = \partial_t u(\partial_t^2 u - \Delta u) = \frac{1}{2}\partial_t((\partial_t u)^2 + \sum_j (\partial_{x_j} u)^2) - \sum_j \partial_{x_j}(\partial_t u \partial_{x_j} u).$$

Cette équation s'écrit $\operatorname{div}(F) = 0$ avec

$$F(t,x) = (\frac{1}{2}((\partial_t u)^2 + \sum_j (\partial_{x_j} u)^2), -\partial_t u \partial_{x_1} u, \ldots, -\partial_t u \partial_{x_d} u).$$

Supposons d'abord que $T > 0$ et considérons le domaine

$$\Omega_T = \{(t,x), |x| < R + T - t, 0 < t < T\}.$$

On note Γ_T la frontière de Ω_T:

$$\Gamma_T = \Gamma_{R,T} \cup \Gamma_{R,0} \cup \mathcal{C}_T$$

où $\Gamma_{R,s} = \{(s,x),\, |x| \leq R+T-s\}$ et $\mathcal{C}_T = \{(t,x),\, |x| = R+T-t, 0 \leq t \leq T\}$. Notons $\nu(x)$ la normale extérieure à Γ_T. On a

$$\nu(x) = \begin{cases} (1,0,\dots,0) \text{ si } x \in \Gamma_{R,T} \\ (-1,0,\dots,0) \text{ si } x \in \Gamma_{R,0} \\ (\frac{1}{\sqrt{2}},\nu_1 \dots,\nu_d) \text{ si } x \in \mathcal{C}_T \end{cases}$$

avec $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_d)$ vecteur orthogonal à la sphère $\{|x| = R+T-t\}$, sortant et tel que $\sum_i \nu_i^2 = \frac{1}{2}$. La formule de la divergence donne alors

$$0 = E(u(0,.);B_{R+T}) - E(u(T,.);B_R) + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}_T} (2\partial_t u\frac{\partial u}{\partial\nu} - \frac{1}{\sqrt{2}}((\partial_t u)^2 + \sum_j (\partial_{x_j} u)^2)d\sigma$$

dont on déduit

$$E(u(T,.);B_R) - E(u(0,.):B_{R+T}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathcal{C}_T} \sum_j (\partial_t u\nu_i - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{x_i} u)^2 d\sigma \leq 0$$

ce qui prouve l'inégalité de droite de (4.15). Pour démontrer l'inégalité de gauche, on applique la formule de la divergence au domain $\{(t,x),\, |x| < R+t-T,\, t \in [0,T]\}$. En notant $\tilde{\mathcal{C}_T} = \{(t,x),\, |x| = T+t-T,\, t \in [0,T]\}$, il vient

$$\begin{aligned} E(u(T,.);B_R) &= E(u(0),B_{R-T}) - \frac{1}{2}\int_{\tilde{\mathcal{C}}_T} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + 2\partial_t u\partial_\nu u d\sigma \\ &= E(u(0),B_{R-T}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\tilde{\mathcal{C}}_T} |\partial_t u\nu + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla u|^2 d\sigma \leq E(u(0),B_{R-T}) \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité de gauche dans de (4.15). Le cas $T < 0$ est similaire et laissé au lecteur. □

Corollaire 4.19 (vitesse finie de propagation) *Soit* $(u_0,u_1) \in H^s \times H^{s-1}$ *et soit* $R > 0$. *Pour tout* $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, *on a*

1) $u_0,u_1 = 0$ *sur* $B(x_0,R+|t_0|) \Longrightarrow u(t_0,.) = 0$ *sur* $B(x_0,R)$.

2) $\mathrm{supp}(u_0,u_1) \subset B(0,R) \Longrightarrow u(t_0,x) = 0$ *pour tout* $|x| \geq R+|t_0|$.

Preuve. Quitte à effectuer le changement de variable $y = x+x_0$, on peut supposer x_0=0.

1) Supposons que u_0 et u_1 sont nuls sur $B(x_0,R+|t_0|)$. Alors $E(u(0),R+|t_0|) = 0$ et d'après le Lemme précédant, il vient $E(u(t_0),R) = 0$. Par conséquent $u(t_0,.)$ est nulle sur $B(0,R)$.

2) Supposons maintenant que u_0 et u_1 sont supportés dans $B(0,R)$. Alors l'énergie de la solution u au temps initial $t = 0$ est égale à son énergie locale sur $B(0,R)$

$$E(u(0)) = E(u(0),R).$$

Par ailleurs, on déduit du Lemme que $E(u(t_0),R+|t_0|) \geq E(u(0),R)$. Par conséquent

$$E(u(t_0),R+|t_0|) \geq E(u(0))$$

et comme $E(u(t_0),R+|t_0|) \leq E(u(t_0)) = E(u(0))$, on en déduit que $E(u(t_0),R+|t_0|) = E(u(t_0))$. Par conséquent l'énergie sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,R+|t_0|)$ est nulle et donc u est nulle sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,R+|t_0|)$.

□

Chapitre 5

Problèmes aux limites

5.1 Le théorème de Hille-Yosida

5.1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 5.1 *Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach. On dit que A est fermé si son graphe*

$$G(T) : \{(u,Tu), u \in E\}$$

est fermé.

Théorème 5.2 (Théorème du graphe fermé) *Soient E,F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Alors T est continu ssi $G(T)$ est fermé.*

Théorème 5.3 (Cauchy-Lipschitz-Picard) *Soit E un espace de Banach et $F : E \to E$ une application Lipschitzienne. Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,E)$ telle que*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u), \ \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

5.1.2 Opérateurs accrétifs

Dans cette section $(E,\langle .,. \rangle)$ désigne un espace de Hilbert.

Définition 5.4 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. On dit que A est accrétif si*

$$\forall u \in D(A), \langle Au,u \rangle \geq 0$$

On dit que A est maximal accrétif si on a de plus $R(I + A) = E$, c'est à dire

$$\forall f \in E, \exists u \in D(A), f = (I + A)u.$$

Remarque 5.5 *Pour tout $f \in E$, il y a unicité de la solution de l'équation $(I + A)u = f$. Supposons en effet que $(I + A)u = 0$, alors*

$$0 = \langle u + Au,u \rangle = |u\|^2 + \langle Au,u \rangle \geq |u\|^2$$

et donc $u = 0$.

Proposition 5.6 *Soit A un opérateur maximal accrétif. Alors*

i) $D(A)$ est dense dans A

ii) A est fermé

iii) Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur E et $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur continu avec $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1$.

Preuve. Montrons d'abord que $D(A)$ est dense dans E. Supposons que $f \in D(A)^{\perp}$. Par définition, il existe $u \in D(A)$ tel que $f = u + Au$. Comme $f \in D(A)^{\perp}$, on en déduit que

$$0 = \langle f,u\rangle = \langle u + Au,u\rangle \geq \|u\|^2$$

ce qui implique $u = 0$. Ceci montre que $D(A)^{\perp} = 0$ et donc $D(A)$ est dense dans E.

Montrons maintenant que le graphe de A est fermé. D'après la remarque précédente, $(I + A)^{-1}$ est bien défini et envoie E dans $D(A)$. De plus, on a pour tout $u \in D(A)$

$$\|(I + A)u\|\|u\| \geq \langle (I + A)u,u\rangle \geq \|u\|.$$

Par conséquent $\|(I + A)u\| \geq \|u\|$ et par suite $(I + A)^{-1}$ est continu et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1$. Supposons que $u_n \in D(A)$ vérifie $u_n \to u$ et $Au_n \to f$. Comme A est accrétif, il existe $v \in D(A)$ tel que $f = v + Av$. On en déduit que $Au_n + u_n$ converge vers $u + v + Av$ et en appliquant $(I + A)^{-1}$ qui est continu, il vient que $u_n \to (I + A)^{-1}u + v$. Par suite $u = v + (I + A)^{-1}u$ et en appliquant $I + A$ on obtient $Au = v$. Ceci prouve que A est fermé.

Montrons maintenant le iii). On commence par montrer que pour tout $\lambda_0 > 0$, on a

$$R(I + \lambda_0 A) = E \Longrightarrow \forall \lambda > \lambda_0/2,\ R(I + \lambda A) = E. \tag{5.1}$$

On commence par remarquer que comme précédemment, on a $\|(I+\lambda_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1$. Soit $f \in E$. On cherche $u \in D(A)$ tel que $u + \lambda Au = f$ c'est à dire

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u.$$

ou encore $u = F(u)$ avec

$$F(u) = (I + \lambda_0)^{-1}(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u).$$

Or, la fonctionnelle F est clairement contractante puisque $|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}| < 1$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Picard, qui assure l'existence d'une unique solution à cette équation. Ceci montre (5.1).

On peut maintenant conclure aisément. Puisque $(I + A)$ est surjectif, alors par récurrence immédiate $(I + \lambda A)$ est surjective pour tout $\lambda > 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

□

Définition 5.7 (Régularisée de Yosida) *Soit A un opérateur maximal accrétif. Pour tout $\lambda > 0$, on pose*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad \textit{et} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

A_λ s'appelle la régularisée de Yosida de A.

Remarque 5.8 *Si $A : E \to E$ est continu alors $A_\lambda \to A$ dans $\mathscr{L}(E)$ quand $\lambda \to 0$.*

Proposition 5.9 *Soit A un opérateur maximal accrétif. On a les propriétés suivantes*

1. $A_\lambda u = AJ_\lambda u$, $\forall u \in E$
2. $A_\lambda u = J_\lambda Au$, $\forall u \in D(A)$
3. $\|A_\lambda u\| \leq \|Au\|$, $\forall u \in D(A)$
4. $\lim_{\lambda\to 0^+} J_\lambda u = u$, $\forall u \in E$
5. $\lim_{\lambda\to 0^+} A_\lambda u = Au$, $\forall u \in D(A)$
6. $\langle A_\lambda u, u\rangle \geq 0$, $\forall u \in E$
7. $\|A_\lambda u\| \leq \lambda^{-1}\|u\|$, $\forall u \in D(A)$

Preuve. **1.** On a

$$A_\lambda u = A_\lambda J_\lambda^{-1} J_\lambda u = \frac{1}{\lambda}(J_\lambda^{-1} - 1)J_\lambda u = \frac{1}{\lambda}\lambda A J_\lambda u = AJ_\lambda u$$

2. On a

$$J_\lambda Au = \frac{1}{\lambda} J_\lambda \lambda Au = \frac{1}{\lambda} J_\lambda(\lambda A + I)u - \frac{1}{\lambda} J_\lambda u = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)u = A_\lambda u$$

3. Immédiat avec le 2) et $\|J_\lambda\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1$.
4. Supposons d'abord que $v \in D(A)$. Alors

$$J_\lambda v - v = J_\lambda(v - (I + \lambda A)v) = -\lambda J_\lambda Av$$

Par suite $\|J_\lambda u - u\| \leq \lambda\|Au\| \to$ quand $\lambda \to 0$. Supposons maintenant que $u \in E$ et soit $\epsilon > 0$. Comme $D(A)$ est dense dans E, il existe $v \in D(A)$ tel que $\|u - v\| < \epsilon$. Par suite

$$\|J_\lambda u - u\| \leq \|J_\lambda(u - v)\| + \|J_\lambda v - v\| + \|u - v\| \leq 2\|u - v\| + \|J_\lambda v - v\| < 2\epsilon + \|J_\lambda v - v\|$$

et on conclu avec le cas précédent.
5. Appliquer 2) et 4).
6. On a

$$\langle A_\lambda u, u\rangle = \langle A_\lambda u, u - J_\lambda u\rangle + \langle A_\lambda u, J_\lambda u\rangle = \lambda\|A_\lambda u\|^2 + \langle AJ_\lambda u, J_\lambda u\rangle \geq \lambda\|A_\lambda u\|^2 \geq 0$$

7. D'après l'inégalité ci-dessus, on a $\langle A_\lambda u, u\rangle \geq \lambda\|A_\lambda u\|^2$ et on peut conclure grace à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

Le lemme suivant nous sera utile par la suite. On note $D(A^2) = \{f \in D(A),\ Af \in D(A)\}$.
Lemme 5.10 *Soit $f \in D(A)$. Alors*

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in D(A^2),\ \|f - g\| < \epsilon \text{ et } \|Af - Ag\| < \epsilon.$$

Preuve. Prendre $g = g_\epsilon = J_\epsilon f$. Supposons d'abvord que $f \in D(A)$. Alors

$$f - g = (I - (I + \epsilon A)^{-1}) = (I + \epsilon A)^{-1}\epsilon Af.$$

Par suite
$$\|f-g\| \le \epsilon \|Af\| \to 0$$
quand $\epsilon \to 0$. On raisonne ensuite par densité pour obtenir le cas $f \in E$. $\square$

Théorème 5.11 (Théorème de Hille-Yosida) *Soit A un opérateur maximal accrétif sur un espace de Hilbert E. Alors, pour tout $f \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,E) \cap \mathcal{C}^0([0,+\infty[,D(A))$ telle que*

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, \ \forall t \ge 0 \\ u(0) = f \end{cases} \tag{5.2}$$

De plus on a les estimations

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| \quad et \quad \|\frac{du}{dt}\| \le \|Au_0\|, \ \forall t \ge 0$$

Preuve. Etape 1: Unicité. Supposons que u et v sont solutions. Alors
$$\partial_t \|u-v\|^2 = 2\langle \partial_t(u-v),(u-v)\rangle = -\langle A(u-v),u-v)\rangle \le 0.$$
Par suite, $\|u(t)-v(t)\|^2 \le \|u(0)-v(0)\|^2 = 0$ et donc $u = v$.

Etape 2: Considérons le problème de Cauchy pour la régularisée de Yosida de A. Soit u_λ solution de

$$\begin{cases} \partial_t u_\lambda + A_\lambda u_\lambda = 0, \ \forall t \ge 0 \\ u_\lambda(0) = f \end{cases} \tag{5.3}$$

On va montrer que
$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \|Af\| \tag{5.4}$$
pour tout $t \ge 0$. D'après le 3) de la proposition précédente, on a $\|A_\lambda f\| \le \|Af\|$. Par suite, il suffit de montrer que pour toute solution u_λ de (5.3) verifie
$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \|A_\lambda u_\lambda(0)\|. \tag{5.5}$$
On montre pour cela que la fonction $t \mapsto \|A_\lambda u_\lambda(t)\| = \|\partial_t u_\lambda(t)\|$ est décroissante. On a
$$\partial_t \|\partial_t u_\lambda(t)\|^2 = \partial_t \langle \partial_t u_\lambda, \partial_t u_\lambda\rangle = -2\langle \partial_t A_\lambda u_\lambda, \partial_t u_\lambda\rangle = -2\langle A_\lambda \partial_t u_\lambda, \partial_t u_\lambda\rangle \le 0$$
car A_λ est accrétif. Cela prouve la décroissance voulue et donc (5.4).

Etape 3: On montre que pour tout $T > 0$, u_λ converge uniformément vers une limite u dans $\mathcal{C}([0,T],E)$ quand $\lambda \to 0$.

Pour tout $\lambda,\mu > 0$, on a
$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_\lambda - u_\mu\|^2 = \langle \partial_t u_\lambda - \partial_t u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle = -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle =: -W \tag{5.6}$$
Par ailleurs, on a
$$\begin{aligned} W &= \langle A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), u_\lambda - u_\mu\rangle \\ &= \langle A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\rangle \\ &\quad + \langle A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), (I - J_\lambda)u_\lambda - (I - J_\mu u_\mu)\rangle \end{aligned}$$

Comme A est accrétif , en utilisant l'identité $I - J_\lambda = \lambda A_\lambda$ on obtient

$$W \geq \langle A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu \rangle = \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda - \mu A_\mu u_\mu \rangle$$

Combiné avec (5.6), cela implique

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu \rangle$$

et par Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq (\|A_\lambda u_\lambda\| + \|A_\mu u_\mu\|)(\lambda \|A_\lambda u_\lambda\| + \mu \|A_\mu u_\mu\|).$$

En combinant cette estimation et (5.4), il vient

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 2(\lambda + \mu)\|Af\|^2$$

et en intégrant

$$\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 4t(\lambda + \mu)\|Af\|^2$$

On déduit de cette estimation que la suite (u_λ) est uniformément de Cauchy sur $[0,T]$. Elle converge donc vers une limite $u \in \mathcal{C}([0,T],E)$.

Etape 4: On suppose que $f \in D(A^2)$. On montre que pour tout $T > 0$, $\partial_t u_\lambda$ converge uniformément sur $[0,T]$.

On note $\psi_\lambda = \partial_t u_\lambda$. Alors ψ_λ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \psi_\lambda + A_\lambda \psi_\lambda = 0, \ \forall t \geq 0 \\ \psi_\lambda(0) = A_\lambda u_\lambda(0) \end{cases}$$

On peut donc montrer les mêmes estimations qu'à l'étape 3. Il vient

$$\frac{1}{2}\partial_t \|\psi_\lambda - \psi_\mu\|^2 \leq (\|A_\lambda \psi_\lambda\| + \|A_\mu \psi_\mu\|)(\lambda \|A_\lambda \psi_\lambda\| + \mu \|A_\mu \psi_\mu\|). \tag{5.7}$$

Or d'après l'étape 2

$$\|A_\lambda \psi_\lambda\| \leq \|A_\lambda \psi_\lambda(0)\| = \|A_\lambda^2 f\|$$

Comme $A_\lambda^2 f = J_\lambda^2 A^2 f$, il suit

$$\|A_\lambda \psi_\lambda\| \leq \|A^2 f\|.$$

En revenant à (5.7), on en déduit que

$$\frac{1}{2}\partial_t \|\psi_\lambda - \psi_\mu\|^2 \leq 2|\lambda + \mu| \|A^2 f\|^2$$

et on conclu comme à l'étape 3.

Etape 5. Sous l'hypothèse que $f \in D(A^2)$, il existe une solution de (5.2). En effet, comme (u_λ) et $(\partial_t u_\lambda)$ convergent uniformément sur tout compact, alors pour tout $T > 0$, $u_\lambda \to u$ dans $\mathcal{C}^1([0,T],E)$, c'est à dire $u_\lambda \to u$ et $\partial_t u_\lambda \to \partial_t u$. Par ailleurs, on a

$$\partial_t u_\lambda + AJ_\lambda u_\lambda = 0$$

et $J_\lambda u_\lambda \to u$ quand $\lambda \to 0$ (grace au 4) de la proposition et à l'estimation $\|J_\lambda\| \le 1$). Comme par ailleurs, on sait que $\partial_t u_\lambda \to \partial_t u$, alors $AJ_\lambda u_\lambda$ converge et comme A est fermé, on a nécessairement $AJ_\lambda u_\lambda \to Au$. On en déduit que u est solution de

$$\partial_t u + Au = 0.$$

Enfin, on a $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,E)$ et comme $Au = -\partial_t u$, on en déduit que $u \in \mathcal{C}^0([0,\infty[,D(A))$. En passant à la limite dans l'identité $\|A_\lambda u_\lambda\| \le \|Af\|$, on obtient

$$\|Au\| \le \|Af\|$$

et on a aussi

$$\partial_t \|u\|^2 = -2\langle Au,u\rangle \le 0$$

donc $\|u(t)\| \le \|f\|$.

Etape 6. On prouve le résultat dans le cas $f \in D(A)$. Notons $\|v\|_A = \|v\| + \|Av\|$. D'après le Lemme 5.10, il existe une suite (f_n) de $D(A^2)$ telle que $\|f_n - f\|_A \to 0$. D'après l'étape précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe u_n solution de

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u + Au = 0, \ \forall t \ge 0 \\ u(0) = f_n \end{array} \right. \tag{5.8}$$

Or, on a

$$\|u_n - u_m\| \le \|f - f_n\| \to 0$$

et

$$\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\| = \|Au_n - Au_m\| \le \|Af_n - Af_m\| \to 0$$

quand $n,m \to \infty$. Par suite, (u_n) et $(\partial_t u_n)$ sont de Cauchy. On note $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, alors en passant à la limite dans (5.8) grace au thérème du graphe fermé, on obtient que u est solution de (5.2). $\square$

Remarque 5.12 *Supposons que les opérateurs A et $-A$ sont tous les deux maximaux accrétifs. Alors pour tout $f \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},E) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R},D(A))$ telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + Au = 0, \ \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0) = f \end{array} \right. \tag{5.9}$$

De plus on a les estimations

$$\|u(t)\| = \|f\| \quad et \quad \|\frac{du}{dt}\| = \|Af\|, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Preuve. Comme A et $-A$ sont maximaux accrétifs on peut appliquer le Théorème de Hille-Yosida à $\partial_t + A$ et $\partial_t - A$. On construit ainsi u_+ et u_- dans $\mathcal{C}^1([0,\infty[,E) \cap \mathcal{C}^0([0,\infty[,D(A))$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_\pm \pm Au_\pm = 0, \ \forall t \ge 0 \\ u_\pm(0) = f \end{array} \right.$$

On définit $u : \mathbb{R} \to D(A)$ par $u(t) = 1\!\!1_{t\ge 0}\, u_+(t) + 1\!\!1_{t<0}\, u_-(-t)$. Par construction, on a

$$\lim_{t\to 0^+} Au(t) = \lim_{t\to 0^+} Au_+(t) = Af = \lim \lim_{t\to 0^+} Au_-(t) = \lim_{t\to 0^-} Au(t)$$

et par suite $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},D(A))$. Comme $\partial_t u_\pm = Au_\pm$, on a aussi $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},E)$ et

$$\partial_t u = Au, \forall t \in \mathbb{R}$$

Pour conclure, remarquons que comme A et $-A$ sont accrétifs alors $\langle Au,u \rangle = 0$ pour tout $u \in D(A)$. En reprenant la preuve du théorème de Hillle-Yosida, on voit facilement que

$$\partial_t \|u\|^2 = 0$$

et par conséquent $\|u(t)\| = cte$. Le fait que $\|Au(t)\|$ est constant est laissé au lecteur. □

5.1.3 Semi-groupes d'opérateurs

Dans cette partie, E désigne un espace de Banach et $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues sur E.

Définition 5.13 *Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur E (en abrégé semi-groupe sur E) est une application $S : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(E)$ vérifiant les propriété suivantes.*

i) $S(0) = \mathrm{Id}$

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t,s \geq 0$.

iii) Pour tout $u \in E$, l'application $t \mapsto S(t)u$ est continue.

Supposons que $A : D(A) \to E$ est un opérateur maximal accrétif. A toute fonction $f \in E$, on peut associer grace au Théorème de Hille-Yosida, une fonction $u \in \mathcal{C}([0,\infty[,D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty[,E)$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, \ \forall t \geq 0 \\ u(0) = f \end{cases}$$

De plus, on a

$$\|u(t)\| \leq \|f\|. \tag{5.10}$$

Ceci permet de définir une application $\Sigma : E \to \mathcal{C}([0,\infty[,D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty[,E)$ par $\Sigma(f) = u$. En utilisant la partie unicité du théorème de Hille-Yosida, on voit facilement que Σ est linéaire. On définit alors $S : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(E)$ par

$$S(t)f = \Sigma(f)(t), \forall f \in E, \forall t \geq 0$$

Il est clair que pour tout $t \geq 0$, $S(t)$ est continue d'après (5.10).

Proposition 5.14 *L'application $t \mapsto S(t)$ est un semi-groupe sur E*

Preuve. Soit $f \in E$. On a $S(0)f = u(0) = f$. Par suite $S(0) = \mathrm{Id}$ ce qui prouve i).

Le point iii) est immédiat puisque pour tout $f \in E$, $S(t)f = u(t)$ et que la fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty[,E)$.

Reste à montrer le ii). Fixons $s \geq 0$ et notons $u(t) = S(t+s)f$ et $v(t) = S(t)S(s)f$. Par définition, on a

$$\partial_t u + Au = 0, \ u(0) = S(s)f$$

et

$$\partial_t v + Av = 0, \ v(0) = S(s)f$$

Par unicité des solutions, on en déduit $u = v$.

□

5.2 Applications

On va appliquer le théorème de Hille-Yosida à la résolution d'EDP pour lesquelles on ne peut pas utiliser la transformation de Fourier.

5.2.1 EDP sur un domaine

5.2.1.1 L'équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On cherche à résoudre l'equation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega$$

Théorème 5.15 *Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Il existe un unique $u \in \mathcal{C}([0,\infty[,H_0^1(\Omega))$ solution de*

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u - \Delta u = 0, \ \forall t \geq 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{array}\right. \tag{5.11}$$

De plus avec la notation $u(t) = S(t)u_0$, l'application $t \mapsto S(t)$ est un semi-groupe sur $H_0^1(\Omega)$. On notera $S(t) = e^{t\Delta}$.

Preuve. Introduisons l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{H^1} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \langle \nabla u,\nabla v\rangle_{L^2}$$

On considère l'opérateur non-borné $A = -\Delta$ avec domaine $D(-\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2\}$. Attention, dans la définition du domaine $\Delta u \in L^2$ se comprend au sens des distributions.

$$\Delta u \in L^2 \iff \exists w \in L^2,\ \langle \nabla u,\nabla v\rangle_{L^2} = \langle w,v\rangle_{L^2},\ \forall v \in H_0^1$$

Montrons que cet opérateur est maximal accrétif. Pour tout $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle -\Delta u,u\rangle = \langle \nabla u,\nabla u\rangle \geq 0.$$

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $D(A)$, on peut étendre l'inégalité ci-dessus à $D(A)$ et par suite $-\Delta$ est accrétif.

Montrons maintenant que $R(\mathrm{Id} - \Delta) = H_0^1(\Omega)$. Soit $f \in H_0^1(\Omega)$ et soit L_f la forme linéaire associée:

$$L_f(u) = \langle u,f\rangle_{L^2}$$

Il est clair que L_f est continue sur H_0^1. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $v \in H_0^1$ tel que

$$L_f(u) = \langle u,v\rangle_{L^2} + \langle \nabla u,\nabla v\rangle_{L^2}$$

En particulier, on a au sens des distributions $f = u - \Delta u$. On en déduit que $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$ et donc $u \in D(-\Delta)$. Ceci montre que $-\Delta$ est maximal accrétif et le Théorème de Hille-Yosida permet de conclure. $\square$

Théorème 5.16 *Supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^2} \leq e^{-\beta t}\|f\|_{L^2}, \forall t \geq 0$$

Preuve. Comme Ω est borné, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que qu'on ait l'inégalité de Poincaré suivante

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\nabla u\|, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Notons $u(t) = e^{t\Delta}f$. On a

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\langle \partial_t u, u\rangle_{L^2} = -2\langle \nabla u, \nabla u\rangle_{L^2}$$

En utilisant, l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \leq -2\alpha^2\|u(t)\|^2$$

On intégre cette EDO, il vient

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2\alpha^2 t}\|f\|^2.$$

En prenant la racine carrée, on obtient le résultat annoncé avec $\beta = \alpha^2$. □

5.2.1.2 L'équation des ondes

On considère l'équation des ondes sur un ouvert borné Ω du plan

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0 \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ u(0,x) = u_0(x),\, \partial_t u(0,x) = u_1(x) \\ u(t,.) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.12}$$

Le point départ de l'analyse consiste à mettre le problème précédent sous forme d'une EDP d'ordre 1 en temps. Formellement, il est facile de voir que u est solution de l'équation des ondes si et seulement si le couple $(u,v) = (u,\partial_t u)$ est solution de

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ c^2\Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Théorème 5.17 *Pour tout $u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},L^2(\Omega))\cap\mathcal{C}^1(\mathbb{R},H_0^1(\Omega))$ solution du problème*

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0 \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ u(0,.) = u_0,\, \partial_t u(0,.) = u_1 \\ u(t,.) \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.13}$$

De plus l'énergie

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2 dx$$

vérifie $E(u(t)) = E(u(0))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Afin d'alléger les notations, on suppose $c = 1$ dans toute la démonstration. On introduit l'espace fonctionnel $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \langle \nabla u_1, \nabla v_1\rangle_{L^2} + \langle u_2, v_2\rangle_{L^2}.$$

Compte tenu de l'inégalité de Poincaré, cela définit bien un produit scalaire sur H. On considère ensuite l'opérateur non borné

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

avec domaine $D(A) = \{(f,g) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),\ \Delta f \in L^2\}$. On veut montrer que A est maximal accrétif sur H. Pour tout $U = \binom{u_1}{u_2}$, on a $AU = \binom{u_2}{\Delta u_1}$. Par suite, pour tout U, on a

$$\langle AU,U\rangle_H = \langle \nabla u_2,\nabla u_1\rangle_{L^2} + \langle \Delta u_1,u_2\rangle = \langle \nabla u_2,\nabla u_1\rangle_{L^2} - \langle \nabla u_2,\nabla u_1\rangle_{L^2} = 0$$

ce qui prouve que A et $-A$ sont accrétifs.

Montrons que $\mathrm{Id} + A$ est surjectif. Soit $(f,g) \in H$. On cherche $u \in H_0^1$ et $v \in H_0^1$ tels que $\Delta u \in L^2$ et

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \\ \Delta & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f - g \\ v = f - u \end{cases}$$

En appliquant le théorème de Riesz, on obtient une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u + u = f - g$. De plus, comme u,f et g sont L^2 alors $\Delta u \in L^2$ ce qui prouve que $(u,v) \in D(A)$.

De la même manière, on montre que $-A$ est maximal accrétif. On peut donc appliquer la Remarque (5.12) pour conclure. L'identité d'énergie est aussi une conséquence de l'identité $\|Au\| = cte$ dans la remarque.

$\square$