**C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–6, 2001** – PXMA????.TEX –
**Equations aux Dérivées Partielles/*Partial Differential Equations***

# Estimation des résidus de l'amplitude de diffusion pour des perturbations de longue portée

**Laurent Michel** [a]

[a] **Département de Mathématiques appliquées, Université Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence, France. Courriel : lmichel@math.u-bordeaux.fr**

**(Reçu le ?????, accepté après révision le ?????)**

**Résumé.** On étudie le comportement semi-classique lorsque $h \to 0$ des résidus de l'amplitude de diffusion associée à un opérateur de Schrödinger $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ pour une perturbation de longue portée $V(x)$. Pour des résonances proches de l'axe réel et sous une hypothèse de séparation, on donne une estimation de chaque résidu en fonction du paramètre $h$ et de la partie imaginaire de la résonance associée. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

***Semi-classical estimate of the residues of the scattering amplitude for long-range perturbations .***

**Abstract.** *We study the semi-classical behavior when $h \to 0$, of the residues of the scattering amplitude associated to the Schrödinger operator $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ for long-range perturbations $V(x)$. For resonances close to the real axis and under a separation condition, we give an estimate of each residue in terms of the parameter $h$ and the imaginary part of the resonance.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *Abridged English version*

Consider the Schrödinger operator $P(h) = -h^2\Delta + V$, in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $0 < h \leqslant 1$. Assume that the potential $V(x)$ is a $C^\infty$ smooth function and satisfies the following condition

**Assumption** $(\mathbf{Hol}_\infty)$ **:** There exist $\theta_0 \in [0, \pi[$ and $R > 0$ such that the potential $V$ extends holomorphically to the domain

$$D_{R,\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| > R,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \tan\theta_0 |\operatorname{Re} z|\}.$$

and

$$\exists \beta > 0, \exists C > 0,\ \forall x \in D_{R,\theta_o},\ |V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}.$$

It follows from Cauchy's formula that if $(\mathbf{Hol}_\infty)$ is satisfied, then the potential $V$ is long-range in the following sense :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(\rho + |\alpha|)},\ \rho > 0.$$

**Note présentée par ????? ??????**

S0764-4442(00)0????-?/FLA

Under this assumption, we can define the scattering amplitude $f(\theta,\omega,\lambda,h)$ related to $P_0(h)=-h^2\Delta$ and $P(h)$, which is smooth in $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{\theta=\omega\}$. Moreover, for $\theta\neq\omega$, we know from [2] that the scattering amplitude has a meromorphic continuation from upper half plane to a conic neighborhood of the real axis, whose poles are the resonances of $P(h)$ defined by complex scaling (see [6]). We will denote by $\mathrm{Res}(P(h)$ the set of resonances of $P(h)$.

Now, we will formulate our statement on the resonances. Let $E_1(h), E_2(h)$ be such that, $\forall h\in]0,1],\ 0\leqslant L^{-1}<E_1(h)\leqslant E_2(h)\leqslant L<+\infty$ where $L>>1$ is constant independent on $h$. Assume that $\omega(h), S(h)>0$ satisfy $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h)=0$ and $S(h)\leqslant h^{\frac{3n+5}{2}}\omega(h)$. Set

$$\Omega_0(h)=\{z\in\mathbb{C};\ E_1(h)-\omega(h)\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant E_2(h)+\omega(h),\ 0\leqslant -\mathrm{Im}\,z\leqslant S(h)\}\,. \tag{1}$$

We say that a resonance is simple, if it is a simple pole of the scattering amplitude. Throughout this paper, we will assume that each $\xi\in\Omega_0(h)\cap\mathrm{Res}(P(h))$ is simple and we will denote

$$\Lambda(h)=\Omega_0(h)\cap\mathrm{Res}(P(h))\text{ and }K(h)=\sharp\ \Lambda(h).$$

We suppose that the set of resonances $\Lambda(h)$ is isolated in the sense that :

$$\mathrm{Res}(P(h))\cap(\Omega(h)\setminus\Omega_0(h))=\emptyset, \tag{2}$$

where $\Omega(h)$ is defined by (6). Let us notice that if $\omega(h)$ satisfies $0<\omega(h)<h^{n+\alpha}$ with $\alpha>0$, then $E_1(h)$ and $E_2(h)$ can be chosen so that (2) holds. This is a direct consequence of the fact that

$$\sharp\left(Res(P(h))\cap([L^{-1},L]+i[-h^{-n-2}S(h),0])\right)=\mathcal{O}(h^{-n}),$$

which comes from the trace formula proved in [6], [7].

Under the above assumptions, the scattering amplitude takes the form

$$f(\theta,\omega,z,h)=\sum_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{f_\xi^{res}(\theta,\omega,h)}{z-\xi}+f^{hol}(\theta,\omega,z,h),$$

where $f^{hol}(\theta,\omega,z,h)$ is holomorphic in $\Omega(h)$. Our aim is to estimate the residues $f_\xi^{res}(\theta,\omega,h)$ and the holomorphic part $f^{hol}(\theta,\omega,z,h)$. For this purpose, we need a separation condition on the resonances of $P(h)$. More precisely, we suppose that there exists $\epsilon>0$ such that the following condition is satisfied.

**Assumption** $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ **:** For all $\xi,\xi'\in\Lambda(h)$ with $\xi\neq\xi'$, we have $|\xi-\xi'|\geqslant\epsilon S(h)$.

Now, we are in position to announce the main result of this note.

THEOREM 0.1. – *Assume that the potential $V$ satisfies hypotheses $(\mathbf{Hol}_\infty)$ and $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ with $\epsilon>0$. Assume that all resonances in $\Omega_0(h)$ are simple and that (2) is satisfied. Let $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ with $\theta\neq\omega$. Then, there exist $C_\epsilon>0$ and $h_0>0$ such that for all $0<h<h_0$, we have*

$$|f_\xi^{res}(\theta,\omega,h)|\leqslant C_\epsilon h^{-\frac{n-1}{2}}K(h)^{\frac{24}{\epsilon^2}}\,|\mathrm{Im}\,\xi|,\ \forall\xi\in\Lambda(h)$$
$$|f^{hol}(\theta,\omega,z,h)|\leqslant C_\epsilon h^{-\frac{n-1}{2}}K(h)^{\frac{24}{\epsilon^2}}\,\log(1+K(h)),\ \forall z\in\tilde\Omega(h),$$

*where $\tilde\Omega(h)$ is the subset of $\Omega(h)$ defined by (10).*

*Remark* 1. – *The above result shows that there is an exact compensation between the residue and the imaginary part of the resonance. It was obtained first by Lahmar-Benbernou and Martinez [3] in the very particular case of a "well in a island". In [9], Stefanov proved this result for general compactly supported perturbations under a more restrictive separation condition (roughly speaking he required condition $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ with "$\epsilon=h^{-n+2}$").*

## 1. Introduction.

Dans cette note, on considère l'opérateur de Schrödinger semiclassique $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $0 < h < 1$. On suppose que le potentiel $V$ est de classe $C^\infty$ et satisfait l'hypothèse suivante

**Hypothèse** $(\mathbf{Hol}_\infty)$ **:** Il existe $\theta_0 \in ]0, \pi[$ et $R > 0$ tels que le potentiel $V$ se prolonge analytiquement au domaine

$$D_{R,\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| > R,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \tan\theta_0 |\operatorname{Re} z|\}.$$

et

$$\exists \beta > 0, \exists C > 0,\ \forall x \in D_{R,\theta_o},\ |V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}.$$

Remarquons que d'après la formule de Cauchy, la condition $(\mathbf{Hol}_\infty)$ implique que le potentiel $V$ est de longue portée au sens suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(\rho + |\alpha|)},\ \rho > 0.$$

Dans ces conditions, l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$, associée aux opérateurs $P(h)$ et $P_0(h) = -h^2\Delta$ est bien définie et c'est une fonction régulière par rapport à $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$. De plus, sous l'hypothèse Hypothèse $(\mathbf{Hol}_\infty)$, Gérard et Martinez [2] ont démontré que l'amplitude de diffusion possède un prolongement méromorphe à un voisinage conique de l'axe réel. Les pôles de ce prolongement sont exactement les résonances appartenant à la région $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. Ici, les résonances de $P$ sont définies par la méthode des dilatations analytiques [6]. Dans la suite nous noterons $\operatorname{Res}(P(h))$ l'ensemble des résonances de $P(h)$.

Nous allons maintenant formuler nos hypothèses sur les résonances. Considérons $E_1(h), E_2(h)$ tels que $\forall h \in ]0, 1],\ 0 \leqslant L^{-1} < E_1(h) \leqslant E_2(h) \leqslant L < +\infty$, où $L > 1$ est une constante indépendante de $h$. Supposons que $\omega(h), S(h) > 0$ satisfont

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0 \text{ et } S(h) \leqslant h^{\frac{3n+5}{2}} \omega(h). \tag{3}$$

Nous posons aussi

$$\Omega_0(h) = \{z \in \mathbb{C};\ E_1(h) - \omega(h) \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant E_2(h) + \omega(h).\ 0 \leqslant -\operatorname{Im} z \leqslant S(h)\} \tag{4}$$

Nous dirons qu'une résonance est simple, si c'est un pôle simple de l'amplitude de diffusion. Dans cette note, nous supposerons que chaque résonance de $\Omega_0(h) \cap \operatorname{Res}(P(h))$ est simple et nous noterons

$$\Lambda(h) = \Omega_0(h) \cap \operatorname{Res}(P(h)) \text{ et } K(h) = \sharp\, \Lambda(h).$$

Nous supposerons aussi que l'ensemble $\Lambda(h)$ est isolé au sens où

$$\operatorname{Res}(P(h)) \cap (\Omega(h) \setminus \Omega_0(h)) = \emptyset, \tag{5}$$

avec

$$\Omega(h) = \left\{z \in \mathbb{C};\ E_1(h) - 7\omega(h) \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant E_2(h) + 7\omega(h),\ 0 \leqslant -\operatorname{Im} z \leqslant 4h^{-n-2} S(h)\right\}. \tag{6}$$

Remarquons que dans le cas où $\omega(h)$ vérifie $0 < \omega(h) < h^{n+\alpha}$ avec $\alpha > 0$, nous pouvons choisir $E_1(h)$ et $E_2(h)$ de sorte que (5) soit satisfaite. Ceci est une conséquence directe de l'estimation

$$\sharp \left(Res(P(h)) \cap ([L^{-1}, L] + i[-h^{-n-2}S(h), 0])\right) = \mathcal{O}(h^{-n}),$$

qui découle de la formule des traces démontrée dans [6], [7]. Dans ces conditions, l'amplitude de diffusion s'écrit sous la forme suivante :

$$f(\theta,\omega,z,h)=\sum_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{f^{res}_{\xi}(\theta,\omega,h)}{z-\xi}+f^{hol}(\theta,\omega,z,h), \tag{7}$$

où $f^{hol}(\theta,\omega,z,h)$ est holomorphe dans $\Omega(h)$. Notre but est d'estimer les résidus $f^{res}_{\xi}(\theta,\omega,h)$ ainsi que la partie holomorphe $f^{hol}(\theta,\omega,z,h)$. Pour cela, nous avons besoin d'une condition de séparation sur les résonances de $P(h)$. Nous supposerons qu'il existe $\epsilon>0$ tel que la condition suivante est satisfaite.

**Hypothèse** $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ **:** Pour tous $\xi,\xi'\in\Lambda(h)$ avec $\xi\neq\xi'$, nous avons $|\xi-\xi'|\geqslant\epsilon S(h)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette note.

THÉORÈME 1.1. – *Supposons que le potentiel $V$ satisfait les hypothèses $(\mathbf{Hol}_\infty)$ et $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ avec $\epsilon>0$. Supposons aussi que les résonances de $P(h)$ appartenant à $\Omega_0(h)$ sont simples et que (5) est satisfaite. Soit $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ avec $\theta\neq\omega$. Alors, il existe des constantes $C_\epsilon>0$ et $h_0>0$ telles que pour tout $0<h<h_0$, nous avons*

$$|f^{res}_{\xi}(\theta,\omega,h)|\leqslant C_\epsilon h^{-\frac{n-1}{2}}K(h)^{\frac{24}{\epsilon^2}}\,|\operatorname{Im}\xi|,\ \forall\xi\in\Lambda(h) \tag{8}$$

$$|f^{hol}(\theta,\omega,z,h)|\leqslant C_\epsilon h^{-\frac{n-1}{2}}K(h)^{\frac{24}{\epsilon^2}}\,\log(1+K(h)),\ \forall z\in\tilde{\Omega}(h), \tag{9}$$

*où*

$$\tilde{\Omega}(h)=\{z\in\mathbb{C};\ E_1(h)-\omega(h)\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant E_2(h)+\omega(h),\ 0\leqslant-\operatorname{Im}z\leqslant 2S(h)\}\,. \tag{10}$$

Rappelons que le premier résultat montrant qu'il y a compensation exacte entre le résidu de l'amplitude de diffusion et la partie imaginaire de la résonance considérée est dû à Lahmar-Benbernou et Martinez [3] et concerne le cas très particulier d'un "puits dans une île". Dans [9], Stefanov a généralisé ce résultat au cas de perturbations à support compact et de résonances isolées.

Notre résultat améliore donc [9] dans plusieurs directions. Tout d'abord, notre théorème est valable pour des potentiels de longue portée tandis que le résultat de Stefanov concerne des perturbations à support compact. Ceci crée des difficultés dues au fait que dans le cas longue portée, nous ne disposons pas d'une formule de représentation simple pour $f$.

La seconde différence importante concerne le nombre de résonances considérées. Dans [9], Stefanov traite le cas où $z_0(h)$ est l'unique résonance dans $\Omega(h)$. Ici, nous considérons le cas où le nombre $K(h)$ de résonances est quelconque et notre condition de séparation est plus faible que celle de Stefanov, puisqu'il requiert la condition $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ avec "$\epsilon=h^{-n+2}$".

Comme $K(h)$ peut se comporter comme $h^{-n}$ quand $h$ tend vers 0, notre but est de prouver que la borne sur les résidus dépend polynomialement de $K(h)$, alors qu'il serait plus simple d'obtenir une borne dépendant exponentiellement de $K(h)$.

## 2. Esquisse de démonstration

En nous inspirant du travail de Stefanov [9], nous introduisons la fonction auxiliaire définie par

$$F(z,h)=\left(\prod_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{z-\xi}{z-\overline{\xi}}\right)f(\theta,\omega,z,h),\ \forall z\in\Omega(h). \tag{11}$$

A partir des formules (7) et (11), nous obtenons facilement l'égalité suivante

$$f^{res}_{\xi}(\theta,\omega,h)=2i\operatorname{Im}(\xi)F(\xi,h)\left(\prod_{\zeta\in\Lambda(h)\setminus\{\xi\}}\frac{\xi-\overline{\zeta}}{\xi-\zeta}\right),\ \forall\xi\in\Lambda(h). \tag{12}$$

Dès lors, la démonstration de l'estimation (8) se décompose en deux parties. On commence par montrer que

$$|F(z,h)| \leqslant Ch^{-\frac{n-1}{2}},\ \forall z \in \tilde{\Omega}(h). \tag{13}$$

Dans un second temps, on estime le terme

$$\Pi(\xi,h) = \prod_{\zeta\in\Lambda(h)\setminus\{\xi\}} \frac{\xi-\overline{\zeta}}{\xi-\zeta}.$$

**Étape 1 : Estimation de $\mathbf{F}(\mathbf{z},\mathbf{h})$.** Par construction, la fonction $F$ est holomorphe dans $\Omega(h)$. On peut donc appliquer le principe du maximum semiclassique (cf. [8], [10]). Plus précisément, d'après le Lemme 1 de [8], il suffit de démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|F(z,h)| \leqslant Ch^{-\frac{n-1}{2}},\ \forall z \in [E_1(h) - 7\omega(h), E_2(h) + 7\omega(h)] \tag{14}$$

$$|F(z,h)| \leqslant Ce^{Ch^{-n-1}},\ \forall z \in \Omega_{\frac{3}{4}}(h). \tag{15}$$

avec

$$\Omega_{\frac{3}{4}}(h) = \Big\{z\in\mathbb{C};\ E_1(h) - \frac{21}{4}\omega(h) \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant E_2(h) + \frac{21}{4}\omega(h),\ 0 \leqslant -\operatorname{Im} z \leqslant 3h^{-n-2}S(h)\Big\}.$$

L'estimation (14) est une conséquence du Théorème 1.1 de [4]. En effet, d'après ce résultat nous savons que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+^*$, nous avons

$$|f(\theta,\omega,z,h)| \leqslant Ch^{-\frac{n-1}{2}},\ \forall z \in K.$$

D'autre part, pour $z \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons clairement $|F(z,h)| = |f(\theta,\omega,z,h)|$. En réunissant ces deux résultats, l'estimation (14) devient évidente.

L'idée de démonstration de (15) est la suivante. On reprend les formules donnant le prolongement de $f$ établi dans [2], pour écrire

$$f(\theta,\omega,z,h) = f_1(\theta,\omega,z,h) + f_2(\theta,\omega,z,h),$$

où $f_1$ et $f_2$ sont données de manière explicite. On montre par des calculs directs que $f_1$ vérifie une estimation du type (15), tandis que le cas de $f_2$ nécessite des résultats plus profonds. Via l'expression de $f_2$, il s'agit de montrer que

$$\Big\| \left(\prod_{\xi\in\Lambda(h)} \frac{z-\xi}{z-\overline{\xi}}\right)(P_\mu(h) - z)^{-1}\Big\|_{L^2(\Gamma_\mu),L^2(\Gamma_\mu)} \leqslant Ce^{Ch^{-n-1}}, \tag{16}$$

pour tout $z$ dans $\Omega_{\frac{3}{4}}(h)$. Ici, $P_\mu(h)$ désigne l'opérateur modifié défini dans [6], qui permet de construire les résonances. L'obtention de cette estimation repose sur le Lemme 1 de [10] et sur l'existence d'une bande de taille $\mathcal{O}(e^{-C/h})$ libre de résonances démontrée par Burq [1]. Pour plus de détails, nous renvoyons à [5].

**Étape 2 : Estimation de $\boldsymbol{\Pi}(\xi,\mathbf{h})$.** Le point clef de la démonstration consiste à utiliser l'hypothèse $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ , pour ranger les résonances de $\Lambda(h)$ convenablement. Plus précisément, nous avons le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans [5].

LEMME 2.1. – *Supposons* $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ *avec* $0 < \epsilon < 1$ *et soit* $\alpha \in [E_1(h) - \omega(h), E_2(h) + \omega(h)]$. *Alors, nous pouvons trouver* $L_\epsilon(h) \in [\frac{\epsilon}{2}K(h), (\frac{2}{\epsilon} - 1)^{-1}K(h)]$ *tel que*

$$\Lambda(h) = \bigcup_{j=1}^{L_\epsilon(h)} \bigcup_{i=1}^{[2/\epsilon]} \{z_{ij}\} \tag{17}$$

*et*

$$\forall z \in \Omega(h) \cap \{\mathrm{Re}\ z = \alpha\},\ \forall j \geqslant 2,\ \forall i \in \{1, \dots, [2/\epsilon]\},\ |z - z_{ij}| \geqslant (j-1)\frac{\epsilon S(h)}{6}. \tag{18}$$

A l'aide de ce lemme nous pouvons achever la démonstration du Théorème 1.1. Par définition, nous avons

$$|\Pi(\xi, h)| \leqslant \prod_{\zeta \in \Lambda(h) \setminus \{\xi\}} \left(1 + \frac{2|\,\mathrm{Im}\,\xi|}{|\xi - \zeta|}\right).$$

Nous appliquons le Lemme 2.1 avec $\alpha = \mathrm{Re}\ \xi$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\Lambda(h) = \bigcup_{j=1}^{L_\epsilon(h)} \bigcup_{i=1}^{[2/\epsilon]} \{z_{ij}\}$$

avec $z_{11} = \xi$ et $\forall j \geqslant 2,\ \forall i \in \{1, \dots, [2/\epsilon]\},\ |\xi - z_{ij}| \geqslant (j-1)\frac{\epsilon S(h)}{6}$. Par suite, en invoquant $(\mathbf{Sep}_\epsilon)$ pour séparer $\xi$ et $z_{1i},\ i = 1, \dots, [2/\epsilon]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Pi(\xi, h)| &\leqslant \prod_{i=2}^{[2/\epsilon]} \left(1 + \frac{2S(h)}{\epsilon S(h)}\right) \prod_{j=2}^{L_\epsilon(h)} \prod_{i=1}^{[2/\epsilon]} \left(1 + \frac{12 S(h)}{(j-1)\epsilon S(h)}\right) \\ &\leqslant (1 + \frac{2}{\epsilon})^{[2/\epsilon]-1} \prod_{j=2}^{L_\epsilon(h)} \prod_{i=1}^{[2/\epsilon]} \left(1 + \frac{12}{(j-1)\epsilon}\right) \leqslant C_\epsilon\, (1 + L_\epsilon(h))^{24/\epsilon^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons $L_\epsilon(h) \leqslant (\frac{2}{\epsilon} - 1)^{-1} K(h) \leqslant K(h)$ et nous trouvons

$$|\Pi(\xi, h)| \leqslant C_\epsilon (1 + K(h))^{24/\epsilon^2}, \tag{19}$$

ce qui achève l'étape 2.

Finalement, en combinant (12), (13) et (19), nous obtenons l'estimation (8). La démonstration de (9) repose sur des arguments identiques et nous renvoyons à [5] pour plus de détails.

**Remerciements.** L'auteur tient à remercier V. Petkov pour lui avoir suggéré ce sujet et P. Stefanov pour ses remarques.

## Références bibliographiques

[1] N.Burq, *Lower bounds for shape resonances width of long range Schrödinger operators*, Amer. J. Math., 124, 2002, n°4, pp. 677-735.

[2] C. Gerard, *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée*, Ann. Inst. H. Poincaré Phy. Theor., **51**, 1989, n°1, pp. 81-110.

[3] A. Lahmar-Benbernou and A. Martinez, Semiclassical asymptotics of the residues of the scattering matrix for shape resonances, Asympt. Anal., **20**, 1999, n°1, pp.13-38.

[4] L. Michel, *Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations at fixed energy*, Canad. J. Math., to appear.

[5] L. Michel, *Semi-classical estimate of the residues of the scattering amplitude for long-range potentials*, Preprint Univ. Bordeaux 1, 2002.

[6] J. Sjöstrand, A trace formula and review of some estimates for resonances. In : Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996), pp. 377-437, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ.,1997.

[7] J. Sjöstrand, Resonances for bottles and trace formulae, Math. Nachr., **221** (2001), pp. 95-149

[8] P. Stefanov, Resonance expansions and Rayleigh waves, Math. Res. Lett., **8**, n°1-2, 2001, pp. 107-124.

[9] P. Stefanov, Estimates on the residues of the scattering amplitude, Asympt. Anal., 32 (3-4), 2002, pp. 317-333.

[10] S. H. Tang and M.Zworski, *From quasi-modes to resonances*, Math. Res. Lett., **5** (1998), 261-272.