C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–6, 2001 – PXMA????.TEX –
Equations aux Dérivées Partielles/*Partial Differential Equations*

Comportement asymptotique semiclassique de l'amplitude de diffusion pour des perturbations captives

Laurent Michel [a]

[a] **Département de Mathématiques appliquées, Université Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence, France. Courriel : lmichel@math.u-bordeaux.fr**

(Reçu le ?????, accepté après révision le ?????)

Résumé. On étudie le comportement semiclassique lorsque $h \to 0$ de l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ associée à un opérateur de Schrödinger $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)$ pour une perturbation de courte portée $V(x)$. On montre que si l'on modifie le potentiel $V(x)$ dans un domaine contenu dans $\{x : V(x) > \lambda\}$, l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ est modifiée par un terme d'ordre $O(h^\infty)$. De plus, si on fait une hypothèse d'échappement de certaines trajectoires, on obtient une asymptotique de l'amplitude de diffusion. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations

Abstract. *We study the semi-classical behavior when $h \to 0$, of the scattering amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ associated to the Schrödinger operator $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)$ for short range perturbations $V(x)$. We show that if we modify the potential $V(x)$ in a domain contained in $\{x : V(x) > \lambda\}$, the scattering amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ is changed by a term of order $O(h^\infty)$. Moreover, under an additional escape assumption, we get an asymptotics of the scattering amplitude.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Consider the Schrödinger operator $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V$, in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $0 < h \leqslant 1$. We assume that the potential $V(x)$ satisfies the following condition

Assumption $(\mathbf{V})_\rho$: V is a real C^∞-smooth function such that

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(\rho + |\alpha|)},\ \rho > 1.$$

The operator $P(h)$ with domain $D(P(h)) = H^2(\mathbb{R}^n)$ is self-adjoint in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Moreover, we can define the scattering amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ related to $P_0(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta$ and $P(h)$, which is smooth in $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$. D. Robert and H. Tamura [6] have studied the asymptotic behavior of f as $h \to 0$ for fixed $\theta, \omega \in S^{n-1}$, $\theta \neq \omega$, in the case where the energy λ is fixed in a non-trapping interval.

Note présentée par ????? ??????

S0764-4442(00)0????-?/FLA

More precisely, denote by $(q(t,y,\eta),p(t,y,\eta))$ the solution to the Hamiltonian system (1) and recall the non-trapping condition

(NT) : We say that the energy λ is non-trapping for the symbol $\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$ if for any $R>0$ large enough, there exists $T=T(R)$ such that $|q(t,x,\xi)|>R$ for $|t|>T$ when $|x|<R$ and $\lambda=\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$.

For ω and θ fixed in S^{n-1} and for λ satisfying the non-trapping condition, Robert and Tamura obtained for f a complete asymptotic expansion.Therefore, it is easy to show that the scattering amplitude is changed by a term of order $O(h^\infty)$ if we modify the potential in the region $\mathcal{O}_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n\,;V(x)>\lambda\}$. Our goal is to prove a similar result in the case where λ is a trapping energy level. Assume that $\mathcal{O}_\lambda\neq\emptyset$ and let F be a closed subset of $\mathcal{O}_\lambda$ and $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ be such that $\psi=1$ on $\mathbb{R}^n\setminus F$. Let us denote $\tilde{V}(x)=\psi(x)V(x)$, $\tilde{P}(h)=-h^2\Delta+\tilde{V}(x)$ and $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ the scattering amplitude associated to $\tilde{P}(h)$. We wish to compare $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ with $f(\theta,\omega,\lambda,h)$.

Let $R(z)=(P(h)-z)^{-1},\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ be the resolvent of $P(h)$ and $R(\lambda\pm i0)=\lim\limits_{\epsilon\to 0,\epsilon>0}R(\lambda\pm i\epsilon)$. Here we take the limit in the spaces of bounded operators $\mathcal{L}(L^2_\alpha,L^2_{-\alpha}),\alpha>\frac{1}{2}$, where $L^2_\alpha=\{f\ :<x>^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Under the assumption that $(\mathbf{V})_\rho$ is satisfied with $\rho>\frac{n+1}{2}$ and additional hypotheses given in [5], on the growth of $\|R(\lambda+i0)\|_{L^2_{loc},L^2_{comp}}$, S.Nakamura obtained an exponential decay of the difference $f-\tilde{f}$. The following theorem compares $\tilde{f}$ and f in the case where we assume only $\rho>1$.

THEOREM 0.1. – *Assume the following conditions*

1) $(\mathbf{V})_\rho$ *with* $\rho>1$.
2) *There exist* M *and* $\tilde{M}$ *such that for any* $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\chi R(\lambda\pm i0)\chi\|_{L^2,L^2}=O(h^{-M})$ *and* $\|\chi\tilde{R}(\lambda\pm i0)\chi\|_{L^2,L^2}=O(h^{-\tilde{M}})$.

Then for any $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{\theta=\omega\}$ *we have the following estimate*

$$\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)=f(\theta,\omega,\lambda,h)+O(h^\infty).$$

As we mentioned above, Robert and Tamura obtained an asymptotics for f in the non-trapping case. If we make additional assumptions, it is possible to prove a similar asymptotics in the trapping case. More precisely, given $z\in(\mathbb{R}\omega)^\perp\simeq\mathbb{R}^{n-1}$, we know that there exists a unique solution $(q_\infty(t,z,\omega),p_\infty(t,z,\omega))$ of the Hamiltonian system (1) satisfying condition (2). We will replace the non-trapping condition by the following assumption.

Assumption $(\mathbf{H}_\omega)$: There exists a neighborhood W of ω in S^{n-1} such that

$$\forall\omega'\in W,\ \forall z\in(\mathbb{R}\omega)^\perp\lim_{t\to+\infty}|q_\infty(t,z,\omega')|=\infty.$$

We will also need an assumption of regularity on the incoming and outgoing rays. If we assume $(\mathbf{H}_\omega)$, then there exists $\xi_\infty(z)\in S^{n-1}$ and $r_\infty(z)\in\mathbb{R}^n$ such that (3) is satisfied. We say that $\theta\in S^{n-1}$ is regular with respect to ω, if $\theta\neq\omega$ and $\forall z\in(\mathbb{R}\omega)^\perp,\ \xi_\infty(z,\lambda)=\theta\Longrightarrow\hat{\sigma}(z):=|det(\xi_\infty,\partial_{z_1}\xi_\infty,\dots,\partial_{z_{n-1}}\xi_\infty)|\neq 0$.

THEOREM 0.2. – *Let* $\omega\in S^{n-1}$, *and* $\lambda>0$. *Assume the following conditions :*

1) $(V)_\rho$ *with* $\rho>1$.
2) *There exists* $R>0$ *such that the potential* V *extends holomorphically to a conic neighborhood* $\mathcal{C}$ *of* $\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)$ *in* $\mathbb{C}^n$ *and* $\exists\beta>0,\exists M>0,\ \forall x\in\mathcal{C},\ |V(x)|\leqslant C|x|^{-\beta}$.
3) (H_ω) *is satisfied and* θ *is regular with respect to* ω.
4) *There exists* $\epsilon>0$ *such that the resonances* λ_j *of* $P(h)$ *satisfy* $|Im(\lambda_j)|\geqslant Ch^q$ *for* $Re(\lambda_j)\in[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]$.

Then we have the following asymptotics

$$f(\theta,\omega,\lambda,h)=\sum_{j=1}^{l}\hat{\sigma}(z^j)^{-\frac{1}{2}}e^{ih^{-1}S_j-i\mu_j\frac{\pi}{2}}+O(h),$$

where z_j, S_j and μ_j are defined in [6]. (See also Theorem 1.2 below.)

---

1. Introduction.

Dans cette note, nous considérons l'opérateur de Schrödinger semiclassique $P(h)=-h^2\Delta+V(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $0<h<1$. Nous supposons que le potentiel V satisfait l'hypothèse suivante

Hypothèse $(\mathbf{V})_\rho$: V est une fonction réelle C^∞ telle que

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ |\partial_x^\alpha V(x)|\leqslant C_\alpha(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}(\rho+|\alpha|)},\ \rho>1.$$

L'opérateur $P(h)$ avec domaine $D(P(h))=H^2(\mathbb{R}^n)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, on peut construire l'amplitude de diffusion $f(\theta,\omega,\lambda,h)$, associée aux opérateurs $P(h)$ et $P_0(h)=-h^2\Delta$, qui est régulière par rapport à $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{\theta=\omega\}$. D. Robert et H. Tamura ont étudié dans [6], le comportement asymptotique de f quand $h\to 0$ pour ω, θ et λ fixés, dans le cas où l'énergie λ est non-captive. Plus précisément, notons $(q(t,y,\eta),p(t,y,\eta))$ la solution du système Hamiltonien

$$\begin{cases}\dot{q}=p,\\ \dot{p}=-\nabla_x V(q),\end{cases}\tag{1}$$

avec données initiales (y,η) en $t=0$ et rappelons la condition de non-capture

(NC) : On dit qu'une énergie λ est non-captive pour le symbole $\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$ si pour tout $R>0$ assez grand il existe $T=T(R)$ tel que $|q(t,x,\xi)|>R$ pour $|t|>T$ quand $|x|<R$ et $\lambda=\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$.

Pour $\omega\neq\theta$ fixés dans S^{n-1} et λ fixée de telle façon que la condition **(NC)** soit satisfaite, Robert et Tamura ont obtenu un développement asymptotique de f. En utilisant ce développement, on peut montrer très facilement qu'une modification du potentiel $V(x)$ dans la région $\mathcal{O}_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n; V(x)>\lambda\}$, entraîne une perturbation de l'amplitude de diffusion $f(\theta,\omega,\lambda,h)$ d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$. Notre but est d'étendre ce résultat au cas où λ est un niveau d'énergie captif. Plus précisément, soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $\mathcal{O}_\lambda$ et $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi=1$ sur $\mathbb{R}^n\setminus F$. Posons $\tilde{V}(x)=\psi(x)V(x)$, $\tilde{P}(h)=-h^2\Delta+\tilde{V}(x)$ et notons $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ l'amplitude de diffusion associée à $\tilde{P}(h)$. Notre travail consiste à comparer $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ et $f(\theta,\omega,\lambda,h)$.

Dans toute la suite, nous noterons $R(z)=(P(h)-z)^{-1},\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ la résolvante de $P(h)$ (resp. $\tilde{R}(z)$ la résolvante de $\tilde{P}(h)$) et $R(\lambda\pm i0)=\lim\limits_{\epsilon\to 0,\epsilon>0}R(\lambda\pm i\epsilon)$ (resp. $\tilde{R}(\lambda\pm i0)=\ldots$). Ici, on prend la limite dans l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(L^2_\alpha,L^2_{-\alpha}),\alpha>\frac{1}{2}$, où $L^2_\alpha=\{f\ :<x>^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Sous une hypothèse de très courte portée ($(\mathbf{V})_\rho$ est satisfaite avec $\rho>\frac{n+1}{2}$) et en supposant de plus que $\|R(\lambda+i0)\|_{L^2_{loc},L^2_{comp}}$ et $\|\tilde{R}(\lambda+i0)\|_{L^2_{loc},L^2_{comp}}$ ont une croissance polynômial par rapport à h^{-1}, Nakamura a établi dans [5] une décroissance exponentielle de la différence $f-\tilde{f}$. En notant $d_\lambda(.,.)$ la pseudo-distance associée à la métrique d'Agmon $ds^2=\max(V(x)-\lambda,0)dx^2$, il a prouvé l'estimation suivante :

$$|f(\theta,\omega,\lambda,h)-\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)|\leqslant Cexp(-2(d_\lambda(\partial\mathcal{O},F)-\epsilon)/h),$$

pour tout $\epsilon > 0$ assez petit. Le théorème suivant étudie la différence $f - \tilde{f}$ dans le cas où l'on suppose seulement $\rho > 1$.

THÉORÈME 1.1. – *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) $(\mathbf{V})_\rho$ *avec* $\rho > 1$.
2) *Il existe des constantes* M *et* $\tilde{M}$ *telles que pour tout* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\chi R(\lambda \pm i0)\chi\|_{L^2,L^2} = \mathcal{O}_\chi(h^{-M})$ *et* $\|\chi \tilde{R}(\lambda \pm i0)\chi\|_{L^2,L^2} = \mathcal{O}_\chi(h^{-\tilde{M}})$.

Alors, pour tout $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$, *nous avons l'estimation suivante*

$$\tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) = f(\theta, \omega, \lambda, h) + O(h^\infty).$$

Afin d'étendre le résultat de Robert et Tamura au cas captif, on introduit des hypothèses supplémentaires. Etant donné $z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, il existe une unique solution $(q_\infty(t, z, \omega), p_\infty(t, z, \omega))$, de (1) telle que

$$\lim_{t \to -\infty} |p_\infty(t, z, \omega) - \sqrt{2\lambda}\omega| = 0 \text{ et } \lim_{t \to -\infty} |q_\infty(t, z, \omega) - \sqrt{2\lambda}\omega t - z| = 0. \tag{2}$$

Hypothèse $(\mathbf{H}_\omega)$: Il existe un voisinage W de ω dans S^{n-1} tel que

$$\forall \omega' \in W,\ \forall z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \lim_{t \to +\infty} |q_\infty(t, z, \omega')| = +\infty.$$

Si $(\mathbf{H}_\omega)$ est satisfaite, alors il existe $\xi_\infty(z) \in S^{n-1}$ et $r_\infty(z) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\lim_{t \to +\infty} |p_\infty(t, z, \omega) - \sqrt{2\lambda}\xi_\infty(z)| = 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} |q_\infty(t, z, \omega) - \sqrt{2\lambda}\xi_\infty(z)t - r_\infty(z)| = 0. \tag{3}$$

Nous dirons que $\theta \in S^{n-1}$ *est régulier par rapport à* ω, si $\theta \neq \omega$ et $\forall z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp,\ \xi_\infty(z, \lambda) = \theta \Longrightarrow \hat{\sigma}(z) := |det(\xi_\infty, \partial_{z_1}\xi_\infty, \ldots, \partial_{z_n}\xi_\infty)| \neq 0$. Nous avons alors le théorème suivant

THÉORÈME 1.2. – *Soient* $\omega \in S^{n-1}$ *et* $\lambda > 0$. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) $(V)_\rho$ *avec* $\rho > 1$.
2) *Il existe* $R > 0$ *tel que le potentiel* V *se prolonge analytiquement à un voisinage conique* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *et* $\exists \beta > 0, \exists M > 0,\ \forall x \in \mathcal{C},\ |V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}$.
3) (H_ω) *est vérifiée et* θ *est régulier par rapport à* ω.
4) *Il existe* $\epsilon > 0$ *tel que les résonances* λ_j *de l'opérateur* $P(h)$, *satisfont* $|Im(\lambda_j)| \geqslant Ch^q$ *pour* $Re(\lambda_j) \in [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$.

Alors, nous avons l'asymptotique suivante

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \sum_{j=1}^{l} \hat{\sigma}(z^j)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j\frac{\pi}{2}} + O(h),$$

où

$$S_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}|p_\infty(t, z^j, \omega)|^2 - V(q_\infty(t, z^j, \omega)) - \lambda\right) dt - \langle r_\infty(z^j), \sqrt{2\lambda}\theta\rangle,$$

$\mu_j \in \mathbb{Z}$ *est l'indice de Maslov de la trajectoire* $\big(q_\infty(t, z^j, \omega), p_\infty(t, z^j, \omega)\big)$ *sur la variété Lagrangienne* $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ :\ x = q_\infty(t, z, \omega),\ \xi = p_\infty(t, z, \omega),\ z \in \Lambda_\omega,\ t \in \mathbb{R}\}$ *et les* $(z_j)_{j=1,\ldots,l}$ *sont les solutions de* $\xi_\infty(z) = \theta$.

Remarque 1. – *L'hypothèse 2) sert à définir les résonances de* $P(h)$ *par la méthode de complex scaling et permet d'utiliser le principe du maximum semiclassique de Tang et Zworski, [7]. Ainsi, l'hypothèse 4) fournit une estimation de la résolvante du type* $\mathcal{O}(h^{-M})$. *Les hypothèses énoncées dans 3) sont nécessaires afin d'analyser le comportement semiclassique du propagateur* $e^{ih^{-1}tP(h)}$ *et pour appliquer la méthode de la phase stationnaire. Remarquons aussi, que l'hypothèse* (H_ω) *est plus faible que* ***(NC)***, *puisque nous ne demandons pas que toutes les particules classiques s'échappent.*

2. Esquisse de démonstration du Théorème 1.1.

La démonstration du Théorème 1.1 repose sur la formule de représentation de Isozaki et Kitada. D'après cette formule on peut construire des symboles k_{+a}, $k_{\pm b}$ et des phases $\phi_\pm$ tels que la différence entre f et $\tilde{f}$ s'écrit

$$f - \tilde{f} = \langle (R(\lambda + i0) - \tilde{R}(\lambda + i0))(k_{+b}e^{ih^{-1}\phi_+} + k_{-b}e^{ih^{-1}\phi_-}), k_{+a}e^{ih^{-1}\phi_+}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(h^\infty).$$

La première étape de la démonstration consiste en une localisation spatiale. Pour cela nous utilisons de manière essentielle un résultat récent de N. Burq, [2]. Nous pouvons alors écrire sans utiliser les hypothèses de décroissance des résolvantes

$$(f - \tilde{f})(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle (R(\lambda + i0) - \tilde{R}(\lambda + i0))g_{-b}e^{ih^{-1}\phi_-}, g_{+a}e^{ih^{-1}\phi_+}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(h^\infty). \tag{4}$$

Ici, g_{-b} et g_{+a} sont des symboles supportés dans des couronnes centrées sur l'origine $\mathcal{C}_b(0, 10R_0, 10R_0 + 1)$ et $\mathcal{C}_a(0, 20R_0, 20R_0 + 1)$ où $R_0 >$ est assez grand et vérifie en particulier $\mathcal{O} \subset B(0, R_0)$.

On se donne maintenant deux fermés G et H tels que $F \subset\subset G \subset\subset H \subset\subset \mathcal{O}$ et des fonctions $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $1_F \prec \chi_1 \prec 1_G \prec \chi_2 \prec 1_H$. Ici $\chi_1 \prec \chi_2$ signifie que $\chi_2 = 1$ sur le support de χ_1. Par construction, $\tilde{P}(h)(1 - \chi_i) = P(h)(1 - \chi_i),\ i = 1, 2$ et en travaillant comme dans [1], on obtient

$$\tilde{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) = (1 - \chi_1)R(\lambda + i0)(1 - \chi_2) + \tilde{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1]R(\lambda + i0)(1 - \chi_2). \tag{5}$$

Compte tenu des supports de g_{-b} et g_{+a}, nous savons que $(1 - \chi_2)g_{-b} = g_{-b}$ et $(1 - \chi_1)g_{+a} = g_{+a}$, de sorte que les équations (4) et (5) donnent

$$(\tilde{f} - f)(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle R(\lambda + i0)\psi_1[P_0(h), \chi_1]\psi_1\tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_-}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_+}\rangle + O(h^\infty), \tag{6}$$

où $\psi_1 \in C_0^\infty(\{|x| < 5R_0\})$ satisfait $1_{\{|x|<4R_0\}} \prec \psi_1$.

Posons $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_-}$. Afin d'étudier la dépendance en h de $\tilde{\mathcal{V}}_0$, on utilise la notion de front d'onde semiclassique, WF^{sc} introduite par C. Gérard dans [3]. Signalons que cette notion similaire à la notion de front d'onde habituelle, permet de contrôler la décroissance en h en plus de la régularité et que les propriétés élémentaires restent vraies. En particulier on utilise un analogue semiclassique de l'implication

$$P(x, D_x)u = f \Longrightarrow WF(u) \subset WF(f) \cup Char(P)$$

et des inclusions $WF(u) \subset T^*(supp(u)),\ Char(P) \subset T^*(supp(P))$. On renvoie à [3] et [4] pour plus de détails. Un calcul immédiat donne

$$(\tilde{P}(h) - \lambda)\psi_1\tilde{\mathcal{V}}_0 = \psi_1 g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_-} + [\tilde{P}(h), \psi_1]\tilde{\mathcal{V}}_0.$$

Par construction $\psi_1 g_{-b} = 0$, donc $(\tilde{P}(h) - \lambda)\psi_1\tilde{\mathcal{V}}_0 = [P_0(h), \psi_1]\tilde{\mathcal{V}}_0$ et nous déduisons de la remarque précédente que

$$WF^{sc}(\psi_1\tilde{\mathcal{V}}_0) \subset WF^{sc}([P_0(h), \psi_1]\tilde{\mathcal{V}}_0) \cup Char^{sc}(\tilde{P}(h) - \lambda)$$

En utilisant une nouvelle fois les propriétés élémentaires du front d'onde semi-classique, nous obtenons

$$WF^{sc}(\psi_1\tilde{\mathcal{V}}_0) \subset \hat{T}^*(supp([P_0(h), \psi_1])) \cup Char^{sc}(\tilde{P}(h) - \lambda).$$

Par construction, on sait que $supp([P_0(h), \psi_1]) \subset \{4R_0 < |x| < 5R_0\}$ et $Char^{sc}(\tilde{P}(h)) \subset \hat{T}^*(\mathcal{O}^c \cup F)$. Nous en déduisons,

$$WF^{sc}(\psi_1\tilde{\mathcal{V}}_0) \subset \hat{T}^*(\mathcal{O}^c \cup F).$$

De plus, $supp([P_0(h), \chi_1]) \subset G \setminus F$, donc $supp([P_0(h), \chi_1]) \cap (\mathcal{O}^c \cup F) = \emptyset$ et nous obtenons

$$WF^{sc}([P_0(h), \chi_1]\psi_1\tilde{\mathcal{V}}_0) = \emptyset.$$

Par conséquent,
$$\|[P_0(h), \chi_1]\psi_1 \tilde{R}(\lambda + i0) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_-}\| = O(h^\infty). \tag{7}$$
D'autre part, nous déduisons de l'hypothèse 2) du Théorème 1.1 que
$$\|g_{+a} R(\lambda + i0)\psi_1\| = O(h^{-M}). \tag{8}$$
Les équations (7) et (8) combinées avec (6) achèvent de démontrer le théorème.

3. Esquisse de démonstration du Théorème 1.2.

Comme dans le Théorème 1.1, partant de la formule d'Isozaki-Kitada nous montrons que
$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle R(\lambda + i0)(k_{+b} e^{ih^{-1}\phi_+} + k_{-b} e^{ih^{-1}\phi_-}), k_{+a} e^{ih^{-1}\phi_+} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(h^\infty)$$
et nous réalisons la même localisation spatiale que dans la démonstration du Théorème 1.1, pour obtenir
$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle R(\lambda + i0) g_{-b} e^{ih^{-1}\phi_-}, g_{+a} e^{ih^{-1}\phi_+} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(h^\infty). \tag{9}$$
Nous utilisons ensuite l'égalité suivante dans l'équation (9),
$$R(\lambda + i0) = ih^{-1} \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} e^{-ih^{-1}tP(h)} dt + e^{ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)}. \tag{10}$$
A l'aide, de l'hypothèse sur la localisation des résonances, des résultats de [1] et du principe du maximum semiclassique [7], on montre qu'il existe $M > 0$ tel que $\|R(\lambda + i0)\|_{\alpha,-\alpha} = \mathcal{O}(h^{-M})$. En combinant cette estimation et un Lemme d'Egorov dans des espaces à poids (ici nous utilisons l'hypothèse $(\mathbf{H}_\omega)$), nous établissons que pour $T > 0$ assez grand, nous avons
$$\langle R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_-}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_+} \rangle = O(h^N). \tag{11}$$
Des équations (9), (10) et (11), nous déduisons que
$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} \langle e^{-ith^{-1}P(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_-}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_+} \rangle dt + O(h^N).$$
La fin de la démonstration est identique à celle de Robert et Tamura. Nous commençons en donnant une approximation du groupe unitaire $e^{-ith^{-1}P(h)}$, puis nous appliquons la méthode de la phase stationnaire, l'hypothèse 3) traduisant la non-dégénérescense de la phase.

Remerciements. L'auteur tient à remercier V. Petkov pour lui avoir suggéré ce sujet ainsi que pour ses remarques fructueuses. Il tient aussi à remercier V. Bruneau pour leurs discussions.

Références bibliographiques

[1] V. Bruneau and V. Petkov, *Semiclassical Resolvent Estimates for Trapping Perturbations*, Commun. Math. Physics, **213** (2000), no.2, 413-432.

[2] N. Burq, *Lower bounds for shape resonances width of long range Schrödinger operators*, Preprint Univ. Paris XI, 2000.

[3] C. Gérard, *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Mem. Soc. Math. France, **31**, 1988, 146pp.

[4] L. Michel, *Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations at fixed energy*, Preprint Univ. Bordeaux 1, 2001.

[5] S. Nakamura, *Scattering Theory for the Shape Resonance Model I. Non-Resonant Energies*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **50**, (1989), 115-131.

[6] D. Robert and H. Tamura, *Asymptotic behavior of scattering amplitudes in semi-classical and low energy limits*, Ann.Inst.Fourier, **39** (1989), 155-192.

[7] S. H. Tang and M.Zworski, *From quasi-modes to resonances*, Math. Res. Lett., **5** (1998), 261-272.